ЗАДАЧИ
по спецкурсу "Введение в физику фундаментальных взаимодействий"

1. Показать, что для *времениподобного* 4-вектора x^μ ($x^2 = x \cdot x > 0$) знак компоненты x^0 — инвариант группы $L_+^\uparrow$.

2. Показать, что символы Кронекера δ^μ_ν и Леви-Чивита $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ инвариантны относительно преобразований Лоренца.

3. Показать, что действие безмассового скалярного поля с лагранжианом $\mathscr{L} = \dfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$ инвариантно относительно преобразования дилатации: $x' = e^\omega x,\ \varphi'(x') = e^{-\gamma\omega}\varphi(x)$, где константа γ подлежит определению. Найти соответствующий сохраняющийся нётеровский ток, вычислить его дивергенцию для массивного скалярного поля.

4. Показать, что уравнение Шрёдингера для частицы массы m, движущейся в потенциальном поле $V(t,\mathbf{r})$, следует из лагранжиана комплексного скалярного поля $\psi(t,\mathbf{r})$ вида

$$\mathscr{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi.$$

Используя теорему Нётер, вывести выражения для энергии, импульса и момента импульса шрёдингеровского поля, а также закон сохранения вероятности. Найти закон преобразования $\psi(t,\mathbf{r})$ при преобразованиях Галилея ($t' = t,\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t.$).

5. Лагранжиан электромагнитного поля в виде

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2,$$

где ξ — калибровочный параметр, инвариантен относительно калибровочных преобразований $A'_\mu = A_\mu + \lambda\,\partial_\mu\omega,\ \Box\omega = 0,\quad \lambda$ — параметр преобразования. Построить соответствующий сохраняющийся нётеровский ток g^μ. Найти уравнения движения для поля A^μ и показать, что они эквивалентны (при соответствующем выборе начальных условий) уравнениям Максвелла. Найти энергию, импульс и момент импульса поля (показать, что они не зависят от выбора калибровки!).

6. Лагранжиан комплексного массивного векторного поля u^μ имеет вид

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}f^*_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + m^2 u^*_\mu u^\mu;\quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu.$$

Получить уравнения поля и показать, что из них следует условие $\partial_\mu u^\mu = 0$. Построить тензоры энергии-импульса, момента и 4-вектор электромагнитного тока, отвечающий глобальной калибровочной инвариантности лагранжиана. Исключив компоненту u^0, перейти к каноническим переменным и найти энергию, импульс, момент и электрический заряд поля. Записать канонические уравнения Гамильтона и показать их эквивалентность уравнениям Лагранжа.

7. Лагранжиан $SU(2)$-калибровочного поля $\vec{W}_\nu = (W^a_\nu)$, взаимодействующего с действительным скалярным изотриплетом $\vec{\varphi} = \left(\varphi^a\right)$, имеет вид

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(D_\nu\vec{\varphi}\right)\cdot\left(D^\nu\vec{\varphi}\right) + \frac{\mu}{2}\vec{\varphi}^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\vec{\varphi}^2\right)^2 - \frac{1}{4}\vec{G}_{\nu\rho}\cdot\vec{G}^{\nu\rho};\ D_\nu\vec{\varphi} = \partial_\nu\vec{\varphi} + g\vec{W}_\nu\times\vec{\varphi};\ \mu > 0,\ \lambda > 0.$$

Получить явный вид $\mathscr{L}$ после спонтанного нарушения симметрии в унитарной калибровке: $\vec{\varphi}(x) = (0, 0, v + H(x))$, $v = \left(\mu/\lambda\right)^{1/2}$. Записать лагранжиан и уравнения движения системы в терминах физических полей.

8. Лагранжиан σ-модели имеет вид

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu + g(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma^5)]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\cdot\partial^\mu\vec{\pi}) - \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2,$$

где $\psi = \left(\psi^1, \psi^2\right)^T$ — спинорный изодублет, $\vec{\pi} = (\pi^a)$ — псевдоскалярный изотриплет, σ — скалярный изосинглет; $\vec{\tau} = (\tau_a)$ — изоспиновые матрицы Паули, γ^μ и $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ — матрицы Дирака. Записать уравнения движения системы и показать сохранение векторного и аксиального токов: $\vec{V}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\dfrac{\vec{\tau}}{2}\psi + \vec{\pi}\times\partial^\mu\vec{\pi},\ \vec{A}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\dfrac{\vec{\tau}}{2}\psi + \sigma\partial^\mu\vec{\pi} - \vec{\pi}\partial^\mu\sigma$, указав соответствующие симметрии лагранжиана.

11.02.2022 **Профессор**  **А. В. Борисов**