ЗАДАЧИ
по спецкурсу
«ТЕОРИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ»

1. Вычислить ширину Γ распада мюона $\mu \to e\overline{\nu}_e \nu_\mu$ в рамках теории 4-фермионного взаимодействия:
$M_{fi} = \left(4G_F / \sqrt{2}\right)\left(\overline{u}_{\nu_\mu} \gamma_L^\alpha u_\mu\right)\left(\overline{u}_e \gamma_{\alpha L} v_{\nu_e}\right)$, $\gamma_L^\alpha = \gamma^\alpha(1-\gamma^5)/2$.
Указание. Использовать тождество Фирца
$\left(\overline{a}\gamma_L^\alpha b\right)\left(\overline{c}\gamma_{\alpha L} d\right) = -\left(\overline{a}\gamma_L^\alpha d\right)\left(\overline{c}\gamma_{\alpha L} b\right)$
и пренебречь малым отношением масс m_e / m_μ .
2. Вычислить дифференциальное сечение процесса $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ с учетом нейтрального слабого тока на основе лагранжиана взаимодействия
$\mathscr{L} = \sum_{\ell=e,\mu} [e(\overline{\psi}_\ell \gamma^\alpha \psi_\ell) A_\alpha - g_Z(\overline{\psi}_\ell \gamma^\alpha (v_\ell - a_\ell \gamma^5)\psi_\ell) Z_\alpha]$.
Ограничиться областью энергий $m_\mu \ll \sqrt{s} \ll m_Z$ и пренебречь массами лептонов. Показать, что в системе центра масс
$d\sigma/d\cos\theta = \left(\alpha^2/4s\right) R[1+\cos^2\theta + A\cos\theta]$,
где $\alpha = e^2 / 4\pi$, θ — угол рассеяния; $R,\ A$ — функции констант связей $a_\ell,\ v_\ell$ и энергии $\sqrt{s}$. Вычислить асимметрию вперед-назад:
$A_{FB} = [\sigma(0<\theta<\pi/2) - \sigma(\pi/2<\theta<\pi)]/\sigma$.
3. Триплет слабых токов имеет вид:
$j_\alpha^a = \sum_\ell \overline{\psi}_\ell \frac{\tau_a}{2} \gamma_{\alpha L} \psi_\ell$, $\psi_\ell = \begin{pmatrix} \nu_\ell \\ \ell \end{pmatrix}$, $\ell = e,\ \mu,\ \tau$;
τ_a — матрицы Паули ($a = 1,2,3$). Показать, что нётеровские заряды
$I_\pm = \int d^3x\, j_0^\pm (t, \mathbf{x})$, $I_3 = \int d^3x\, j_0^3$, $\tau_\pm = \tau_1 + i\tau_2$,
образуют алгебру слабого изоспина SU(2):
$[I_\pm, I_3] = \mp I_\pm,\ [I_+, I_-] = 2I_3$.
Указание. Использовать известные перестановочные соотношения для операторов фермионных полей.
4. В модели Джорджа–Глешоу, основанной на калибровочной группе SU(2), вводятся дополнительные тяжелые лептоны: *положительно* заряженный E и нейтральный N . Вместе с известными частицами $\nu_e,\ e$ они объединяются в два триплета (левый и правый) и левый синглет:
$\begin{pmatrix} E \\ \nu_e \cos\alpha + N\sin\alpha \\ e \end{pmatrix}_L$, $\begin{pmatrix} E \\ N \\ e \end{pmatrix}_R$, $\left(N\cos\alpha - \nu_e \sin\alpha\right)_L$,
где α — угол смешивания. По аналогии с задачей 3 вычислить $I_\pm$ и показать, что $[I_+, I_-] = 2Q$, где электрический заряд
$Q = \int d^3x \left(E^+E - e^+e\right)$.
5. В условиях задачи 3 рассмотреть первое лептонное поколение. Показать, что
$I_+ = \int d^3x\, \nu_{eL}^+ e_L$, $I_3 = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\nu_{eL}^+ \nu_{eL} - e_L^+ e_L\right)$,
а гиперзаряд $Y = 2\left(Q - I_3\right)$, где электрический заряд
$Q = -\int d^3x \left(e_L^+ e_L + e_R^+ e_R\right)$, коммутирует со всеми генераторами группы SU(2): $[Y, I_k] = 0,\ \ k = 1,2,3.$

6. Лагранжиан безмассового скалярного поля $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)\left(\partial^\mu \varphi\right)$ инвариантен относительно сдвига $\varphi \to \varphi + \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$ (простейший вариант спонтанного нарушения симметрии). Показать, что нётеровский ток имеет вид $j^\mu = \partial^\mu \varphi$. Определим *регуляризованный* заряд, введя гладкое обрезание в пространственных направлениях, в виде
$Q_L = \int d^3x\, \partial_0 \varphi\left(0, \mathbf{r}\right) \exp\left(-\mathbf{r}^2/L^2\right)$ и рассмотрим состояние $\left|\lambda, L\right\rangle = \exp\left(i\lambda Q_L\right)\left|0\right\rangle$. Используя представление поля φ через операторы рождения и уничтожения:
$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2k_0}[a(k)\mathrm{e}^{-ikx} + a^+(k)\mathrm{e}^{ikx}]$, показать, что
$\left\langle 0 \middle| \lambda\right\rangle = \lim_{L\to\infty} \left\langle 0\right| \mathrm{e}^{i\lambda Q_L} \left|0\right\rangle = \lim_{L\to\infty} \exp[-c\left(\lambda L\right)^\nu] \to 0$,
где $c,\ \nu$ — *подлежащие определению* положительные постоянные.
7. Показать, что массовая часть лагранжиана 4-компонентного фермионного поля $\psi = \psi_L + \psi_R$ вида
$-\mathscr{L}_{DM} = m_D \overline{\psi_L} \psi_R + m_L \overline{\psi_L^c} \psi_L + m_R \overline{\psi_R^c} \psi_R$ + э. с.
соответствует двум майорановским фермионам с различными массами.
8. Пусть M — произвольная комплексная матрица 3×3 . Доказать, что она приводится к диагональному виду преобразованием $A_L\, M\, A_R^{-1} = D$, где $A_L,\ A_R$ — унитарные матрицы, $D = \mathrm{diag}\left(m_1, m_2, m_3\right)$ — диагональная матрица с действительными неотрицательными элементами.
9. Вычислить ширину лептонной моды распада $W \to e\,\overline{\nu}_e$, пренебрегая массами лептонов. Оценить полную ширину распада, учитывая все лептонные и адронные (кварковые) моды.
10. Вычислить ширину распада $Z \to \nu_\ell\, \overline{\nu}_\ell$.
11. Вычислить ширину распада $Z \to e^+e^-$.
12. Вычислить полную ширину распада Z -бозона, пренебрегая массами конечных фермионов.
13. Вычислить в 4-фермионном приближении модели Вайнберга–Салама сечения процессов:
$\nu_\mu e \to \nu_\mu e,\ \ \nu_\mu e \to \nu_e \mu,\ \ \nu_e e \to \nu_e e,\ \ e^+e^- \to \nu_e \overline{\nu}_e$.
14. Вычислить ширину распада хиггсовского бозона на фермионную пару: $H \to f\overline{f}$. Найти отношение ширин распадов $H \to \tau^+\tau^-$ и $H \to \mu^+\mu^-$, результат численного расчета сравнить с данными PDG-2018.
15. Вычислить ширину распада хиггсовского бозона на два фотона: $H \to \gamma\gamma$, учитывая вклады только *t*-кварка и *W*-бозона.
16. Вычислить сечение процесса $e^+e^- \to W^+W^-$.
17. Оценить магнитный момент электронного нейтрино.
18. Вычислить ширину основной моды распада *t*-кварка: $t \to bW^+$, пренебрегая массой *b*-кварка. Оценить среднее время жизни *t*-кварка и рассмотреть возможность существования связанного состояния $t\,\overline{t}$ (топония).

11.02.2022 **Профессор** **А. В. Борисов**