Задачи к экзамену по теоретической механике в группах 302, 306, 308, 311, 341

1. Найти полный период колебательного движения частицы между ее точками остановки, если частица имеет массу m, потенциальную энергию $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$ и полную энергию E.

2. Полная энергия частицы, движущейся в центральном поле с потенциалом
$$U(r) = -\alpha \frac{\ln(r/r_0)}{r^2},$$
равна нулю. Найти уравнение траектории частицы, если ее масса m, а модуль момента импульса относительно центра поля M_0.

3. Найти полное сечение падения частиц с массой m в центр поля $U(r) = -\alpha/r^n$ при $\alpha > 0$ и $n > 2$. Модуль скорости частиц на бесконечном удалении от центра поля считать равным v_∞.

4. Потенциальная энергия двух взаимодействующих частиц
$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\varkappa}{2}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - a)^2.$$
Каковы скорости частиц в системе их центра масс при движении частиц по круговым орбитам? Массы частиц m_1 и m_2, а расстояние между ними l.

5. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок пренебрежимой массы. Найти функцию Лагранжа и общее решение уравнения движения точек, если g — ускорение свободного падения, а l — длина нити за вычетом половины длины окружности блока. Трением в блоке пренебречь.

6. Найти функцию Лагранжа двойного плоского маятника: точка с массой m_1 подвешена на невесомом стержне длины l_1 к горизонтальной оси с помощью шарнира, а к этой точке, в свою очередь, с помощью другого шарнира подвешена на невесомом стержне длины l_2 точка с массой m_2. Указать первые интегралы движения. Ускорение свободного падения g, трением в шарнирах пренебречь.

7. Невесомые стержни длины a шарнирно соединены между собой и образуют ромб. Через две противоположные вершины ромба проходит вертикальная ось. В верхней вершине находится шарнир и

ромб вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. В нижней вершине находится масса m_2, которая может без трения перемещаться вдоль вертикальной оси. В оставшихся вершинах ромба находятся две одинаковые массы m_1. Найти функцию Лагранжа системы и указать первые интегралы движения. Ускорение свободного падения g, трением в шарнирах пренебречь.

8. Масса m_1 может без трения перемещаться вдоль горизонтальной оси Ox. К этой массе на шарнире прикреплен невесомый стержень длины R, на нижнем конце которого находится масса m_2, имеющая электрический заряд q. Движение происходит в плоскости, проходящей через ось Ox и стержень. Перпендикулярно этой плоскости (вдоль оси Oz) направлено однородное магнитное поле. Найти функцию Лагранжа системы и указать первые интегралы движения. Ускорение свободного падения g, трением в шарнире пренебречь. Использовать калибровку векторного потенциала: $A_x = -yH$, $A_y = A_z = 0$.

9. Вдоль горизонтальной оси Ox могут без трения перемещаться две одинаковые массы m. Первая масса прикреплена к точке O пружиной. Вторая масса имеет электрический заряд e и соединена с первой массой точно такой же пружиной. Жесткость пружин $\varkappa$, а их длина в ненапряженном состоянии a. Через точку O проходит вертикальная ось, вокруг которой с постоянной угловой скоростью ω вращается ось Ox. Вдоль вертикальной оси вверх направлено однородное магнитное поле. Найти функцию Лагранжа системы и указать первые интегралы движения. Использовать калибровку векторного потенциала: $A_x = -yH/2$, $A_y = xH/2$, $A_z = 0$.

10. Найти частоты малых колебаний массы m, прикрепленной к одному концу пружины с жесткостью $\varkappa$ и перемещающейся без трения вдоль горизонтальной оси. Другой конец пружины закреплен на расстоянии h от этой оси по вертикали. Длина пружины в ненапряженном состоянии l_0. Рассмотреть случаи $h > l_0$ и $h < l_0$.

11. Точки подвеса двух математических маятников одинаковой массы m и одинаковой длины l находятся на одном уровне на расстоянии l_0 друг от друга. Материальные точки маятников соединены пружиной с жесткостью $\varkappa$ и длиной l_0 в ненапряженном состоянии. В приближении малых колебаний найти собственные частоты и главные колебания системы.

12. Система с двумя степенями свободы имеет функцию Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2),$$

где $m, k > 0$. Найти собственные частоты и главные колебания системы.

13. Получить выражение для функции Гамильтона нерелятивистского заряда q массы m в электромагнитном поле со скалярным потенциалом φ и векторным потенциалом $\vec{A}$.

14. Заряд e массы m движется без трения по поверхности конуса с углом раствора 2α, расходящимся вверх. Вдоль оси конуса действует электрическое поле напряженности $\vec{E} = az\vec{k}$. Найти функцию Гамильтона заряда в цилиндрических координатах и указать интегралы движения.

15. Вычислить скобки Пуассона $\{v_i, v_j\}$, где v_i — декартовы компоненты вектора скорости заряда e массы m в однородном магнитном поле напряженности $\vec{H}$.

16. С помощью скобок Пуассона показать, что при движении частицы в центральном поле $U(r)$ сохраняются все компоненты ее момента импульса.

17. Составить уравнение Гамильтона–Якоби для частицы с массой m в однородном гравитационном поле (ускорение свободного падения g). Найти полный интеграл этого уравнения, а также уравнение траектории и закон движения частицы.

18. Составить уравнение Гамильтона–Якоби для математического маятника (масса m, длина подвеса l). Найти полный интеграл этого уравнения и закон движения маятника в квадратуре.

19. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для частицы с массой m, движущейся по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Ускорение свободного падения g.

20. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для частицы с массой m, движущейся по гладкой параболе $y = kx^2$. Ускорение свободного падения g.