

Семинар. 30.11.11.

Поверхностные волны.

Кинематические соотношения для волнового движения в дифференциальной форме, рассмотренные в предыдущем разделе (волновые уравнения), являются основным инструментом, позволяющим судить о возможности протекания волновых процессов и их характере в различных системах. Для этого необходимо лишь сравнить дифференциальные кинематические и динамические уравнения изучаемых процессов с волновыми уравнениями (привести уравнения движения среды к «волновому виду»). Примеры.

Уравнение непрерывности для волны в канале.

При одномерном движении сплошной среды (газ в трубе заданного сечения,

Уравнение простой волны

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

или его обобщение – квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

имеет структуру, подобную уравнению непрерывности.

Уравнение непрерывности может быть записано в интегральной форме для канала шириной b , в котором движется жидкость так, что ее скорость в любом сечении одинакова, а уровень (от дна) задан функцией $h = h(x, t)$. Объем жидкости, ограниченный сечениями x_1

и x_2 определяется интегралом $V(t) = b \int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx$, а его изменение вызывается потоками

через эти сечения:

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t) = b \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) dx = b(v_1 h_1 - v_2 h_2).$$

Преобразуя правую часть $v_1 h_1 - v_2 h_2 = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (vh) dx$, получим уравнение

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} \right) dx = 0$$

для любого выбора сечений. Отсюда уравнение непрерывности для жидкости в канале

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} = 0.$$

Зависимость от глубины $v = v(h)$ может быть получена из дополнительных условий.

Паводковая волна.

Для течения в наклонном канале, укрепленном под углом α к горизонту, скорость установившегося течения определяется из условия равновесия силы тяжести и жидкого

трения: $mg \sin \alpha = F$, где $m = \rho b \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx \approx \rho b h L$, а сила трения F пропорциональна

квадрату скорости и площади смачивания поверхности канала между сечениями:

$$F = Av^2 S = Av^2 (b + 2h)(x_2 - x_1) = Av^2 (b + 2h)L. \text{ При } b \gg h \quad S \approx bL, \text{ поэтому}$$

$$F = Av^2 Lb.$$

В состоянии равновесия скорость потока $v(h) = \alpha \sqrt{h}$, где $\alpha = \rho g \sin \alpha / A$.

При такой скорости уравнение непрерывности $\frac{\partial h}{\partial x} + \alpha \frac{\partial h^{3/2}}{\partial x} = 0$

Приводится к квазилинейному виду

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha \sqrt{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Учитывая связь $v(h) = \alpha \sqrt{h}$, получим окончательно

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3}{2} v(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует, что возмущение уровня – «паводковая волна», распространяется вниз по течению со скоростью $c(h) = \frac{3}{2} v(h)$, где $v(h) = \alpha \sqrt{h}$ – скорость потока.

Гравитационные волны на глубокой воде.

Если волна образуется в результате возмущения поверхности, то она будет затухать с по мере удаления от поверхности вглубь водоема. При этом скорости частиц среды будут иметь сопоставимые компоненты вдоль вертикальной и горизонтальной осей.

Рассмотрим плоскую волну $\vec{v}(x, z, t) = (v_x, 0, v_z)$ в системе координат, где ось Oz направлена вертикально вверх, а волна распространяется в покоящейся среде вдоль оси Ox. Уравнение непрерывности

$$dvv\vec{v} = 0$$

и уравнение Эйлера (в форме Громеки-Лэмба)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}] = -\vec{\nabla} \left\{ \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right\}$$

составляют основу описания.

Линеаризация

Упростим систему, полагая возмущения скорости достаточно малыми, чтобы пренебречь квадратичными членами. В итоге получим линейное уравнение:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left\{ \frac{p}{\rho} - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right\}$$

Пренебрегая векторным произведением, мы фактически ограничились потенциальным течением, полагая $\vec{\omega} = 0$, поэтому можем ввести потенциал скорости $\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$, что приводит к системе линейных уравнений

$$\vec{\nabla} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} - (\vec{g} \cdot \vec{r}) \right\} = 0$$

$$\Delta \varphi = 0$$

Граничные условия.

Если граница раздела воздух-вода задана зависимостью $\zeta = \zeta(x, t)$, то при $z = \zeta(x, t)$ давление равно атмосферному p_0 . Интеграл уравнения Эйлера $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} - (\vec{g} \cdot \vec{r}) = F(t)$ вдали от области возмущения, где $\zeta = 0$, $\varphi = 0$, $p = p_0$ на границе $z = 0$ определяет $F(t) = \frac{p_0}{\rho}$, откуда $\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho g z = p_0$. На границе раздела сред в возмущенной области это приводит к соотношению

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\zeta} + \rho g \zeta = 0.$$

Это граничное условие достаточно сложно, поскольку задано на искривленной поверхности, поэтому его заменяют приближенным, полагая $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}$. Теперь граничное условие имеет простой вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -g\zeta.$$

Еще одно упрощение граничного условия возникает при использовании соотношения $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. На границе раздела сред $z = \zeta(x, t)$ скорости всех частиц направлены по касательной к этой границе и *не равны нулю!*

Полагая функцию $\zeta(x, t)$ достаточно гладкой, а угол наклона касательной к горизонту малым, можно считать, что $v_z \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Отсюда $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, что позволяет исключить возмущение границы $\zeta(x, t)$ из граничного условия на поверхности:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Второе граничное условие – условие затухания возмущений: $\varphi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$.

Решая уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

методом разделения переменных для $\varphi(x, z) = \varphi_1(x) \varphi_2(z)$ получаем

$$\frac{\varphi_1''(x)}{\varphi_1(x)} = -\frac{\varphi_2''(z)}{\varphi_2(z)} = -k^2, \text{ откуда } \varphi_1(x) = e^{ikx}, \varphi_2(z) = e^{kz}, \text{ где } k > 0 \text{ чтобы удовлетворить}$$

условию затухания возмущения.

Временная зависимость $\varphi(x, z, t) = T(t) \varphi_1(x) \varphi_2(z)$ может быть получена из условия на поверхности

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Отсюда

$$T(t) = \varphi_0 e^{-i\omega t}.$$

Это условие приводит к дисперсионному соотношению $\omega(k) = \sqrt{kg}$, из которого следует выражение для фазовой

$$c_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

и групповой

$$c_{gr} = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

скорости волны. Отметим связь между ними

$$c_{ph} = 2c_{gr}.$$

Вычислим скорость частиц жидкости

$$v_x = \text{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t),$$

$$v_z = \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t),$$

и смещение поверхности

$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \frac{v_0}{\omega} \cos(kx - \omega t).$$

Введем амплитуду колебаний поверхности $r = \frac{v_0}{\omega}$, тогда $\zeta(x, t) = r \cos(kx - \omega t)$.

При малой амплитуде колебаний $r \ll \lambda$ можно считать, что частицы среды движутся по круговым траекториям, так что $\bar{z}(t, z) = re^{kz} \cos \omega t$, $\bar{x}(t, z) = re^{kz} \sin \omega t$. Полученный результат позволяет не только определить профиль волны, но и найти максимальную амплитуду волн. Действительно, частицы среды на поверхности совершают круговое движение под действием силы тяжести и реакции поверхности (нормальное давление). В верхней точке траектории эта сила может обращаться в нуль при большой амплитуде колебаний, а центростремительное ускорение - ускорение свободного падения:

$a_c = \omega^2 r = g$. Подставляя сюда $\omega^2 = kg = 2\pi \frac{g}{\lambda}$ и $r = \frac{h}{2}$ получаем

$$h_{\max} = \frac{\lambda}{\pi}.$$

Заметим, что наблюдаемые амплитуды колебаний не превосходят половины вычисленного нами значения.

При *ограниченной глубине канала* H модель позволяет найти решение, изменив граничные условия:

$$v_z(x, -H, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0.$$

Для выполнения этого условия выберем решение

$$\varphi_2(z) = e^{kz} + be^{-kz}.$$

Тогда $\frac{\partial \varphi_2(z)}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k(e^{-kH} - be^{kH}) = 0$, откуда $b = e^{-2kH}$.

В итоге потенциал скорости, удовлетворяющий новым граничным условиям, имеет вид:

$$\varphi(x, z, t) = \varphi_0 \operatorname{ch}(k(z+H)) e^{-i\omega t + ikx}.$$

Условие на поверхности воды $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}$ приводят к соотношению:

$$\omega^2 \operatorname{ch}(kH) = gk \operatorname{sh}(kH),$$

откуда получаем дисперсионное соотношение в явном виде

$$\omega(k) = \sqrt{gk} \cdot \operatorname{th}^{1/2}(kH).$$

При небольшой глубине водоема $kH \ll 1$ $\operatorname{th}(kH) \approx kH$, поэтому

$$\omega(k) = k\sqrt{gH}$$

Фазовая скорость волны на мелкой воде $c_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{gH} = c_{gr}$.

Таким образом, волны на мелкой воде распространяются практически без дисперсии (в принятом приближении).

Пульсовая волна. (Пэдди Т. Гидродинамика кровеносных сосудов)

Для поперечного сечения $S = S(x)$ эластичной трубки введем растяжимость – параметр, определяющий эластичные свойства трубки соотношением $D = \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial p}$.

Этот параметр связан с модулем Юнга линейной деформации E соотношением $D^{-1} = \frac{E}{1 - \sigma^2} \frac{h}{d}$, где h – толщина стенки сосуда, d – его диаметр, а σ – коэффициент Пуассона ($\sigma = 1/2$ для несжимаемого материала стенок)

В более реальной модели используются не статические, а динамические параметры, описывающие вязкоупругие свойства сосудов (стенок трубы).

Будем считать трубу трубкой тока, для которой скорость одинакова в любой точке поперечного сечения $v = v(x, t)$.

Избыточное давление, обусловленное деформацией трубы (изменением ее поперечного сечения) задается уравнением $p = p(S)$.

Выделим элемент объема, заключенный между сечениями S_1 и S_2 , где $S_1 = S(x_1)$, а $S_2 = S(x_2)$, и запишем уравнение непрерывности для этого объема:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} S(x) dx = v_1 S_1 - v_2 S_2$$

Чтобы написать редуцированное уравнение для изменения импульса, воспользуемся теоремой об изменении импульса в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) = 0,$$

которое получается из уравнения Эйлера и непрерывности.

Проинтегрировав это уравнение по объему жидкости в выделенном сечении, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} S(x) v(x) dx + \oint_{\Sigma} \left(v_i v_k + \frac{p}{\rho} \delta_{ik} \right) ds_k = 0$$

Интеграл по поверхности распадается на три слагаемых

$$\oint_{\Sigma} \left(v_i v_k + \frac{p}{\rho} \delta_{ik} \right) ds_k = - \left(v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} \right) S_1 + \left(v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \right) S_2 + \frac{1}{\rho} \int_{\Sigma_{бок}} p(x) ds_x$$

Последний интеграл вычисляется по боковой поверхности трубы между выделенными сечениями.

Рассматривая рис..., нетрудно убедиться, что $ds_x = - \frac{\partial S(x)}{\partial x} dx$ и записать проекцию потока импульса на Ox

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} S(x) v(x) dx + \left(\left(v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} \right) S_2 - \left(v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} \right) S_1 \right) - \frac{1}{\rho} \int_{x_1}^{x_2} p(x) \frac{\partial S(x)}{\partial x} dx = 0.$$

Интегрирование по частям в последнем слагаемом приводит выражению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} S(x) v(x) dx + (v_2^2 S_2 - v_1^2 S_1) + \frac{1}{\rho} \int_{x_1}^{x_2} S(x) \frac{\partial p(x)}{\partial x} dx = 0.$$

Выбирая сечения расположенными близко друг к другу $x_2 = x_1 + dx$, и переходя к пределу, получим дифференциальное соотношение – изменение проекции импульса на направление оси трубы

$$\frac{\partial(Sv)}{\partial t} + \frac{\partial(Sv^2)}{\partial x} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p(x)}{\partial x} = 0.$$

Вместе с уравнением непрерывности в дифференциальной форме

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0$$

и уравнением эластичности стенок трубы $p = p(S)$ в виде зависимости $D = \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial p}$, имеем

полную систему уравнений.

Исключая $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{DS} \frac{\partial S}{\partial x}$ и уравнения для импульса, получим систему

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial(Sv)}{\partial t} + \frac{\partial(Sv^2)}{\partial x} + \frac{1}{\rho D} \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

или, вводя обозначение $c^2 = 1/\rho D$,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{S} \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Воспользуемся методом Римана для нахождения волновых решений, полагая $v = v(S)$,

так что $\frac{\partial v}{\partial t} = v'_S \frac{\partial S}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = v'_S \frac{\partial S}{\partial x}$. Тогда уравнения дают систему

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (v + Sv') \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \qquad v' \frac{\partial S}{\partial t} + \left(vv' + \frac{c^2}{S} \right) \frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

условие разрешимости которой $v' = \frac{dv}{dS} = \pm \frac{c}{S}$, откуда $v = \pm c \int \frac{dS}{S}$ (S_0 – невозмущенное сечение трубы).

Для $c \gg v$ уравнения линеаризуются, так что скорость волны оказывается постоянной, независимо от амплитуды давления (Юнг 1809 г.)

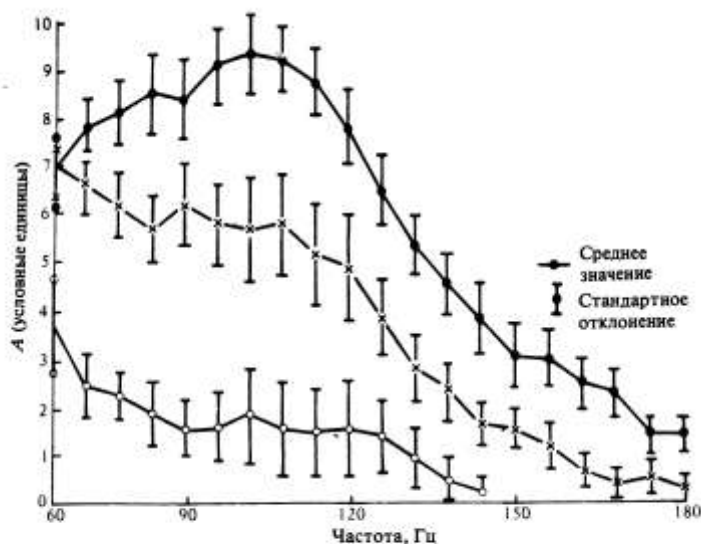


РИС. 1.27. Зависимость амплитуды A высокочастотных составляющих тонов Короткова от частоты: верхняя кривая — тоны до приглушения; средняя — приглушенные тоны; нижняя — тоны после приглушения (фон). (По [135].)