Мелкая вода

Если течение можно рассматривать, как одномерное, то уравнения движения несжимаемой среды (жидкости) в горизонтальном канале удобно получить, используя интегральные теоремы об изменении массы и импульса объема жидкости между выдаланными сечениями (см. рис.). Обозначим уровень жидкости $h = h(x,t)$. Масса М

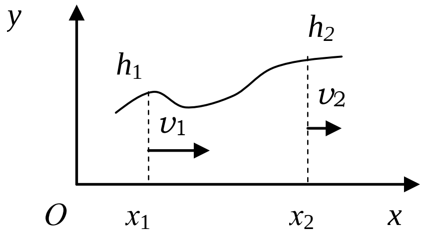

Рис.

жидкости плотностью ρ между сечениями x_1 и x_2 определяется интегралом $M(t) = \rho \int_{x_1}^{x_2} h(x,t)dx$, а ее изменение обусловлено потоками вещества через эти сечения: $\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \rho(h_1 v_1 - h_2 v_2)$.

Импульс выделенного объема $P(t) = \rho \int_{x_1}^{x_2} v(x,t)h(x,t)dx$, а его изменение обусловлено как потоками импульса через сечения, так и давлением со стороны внешних частей жидкости в сечениях x_1 и x_2. В первом приближении можно взять гидростатическое давление $p = \rho g y + p_0$.

Более аккуратно давление определяется уравнением Эйлера. Для потенциального течения, когда $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{v} = 0$, можно ввести потенциал скорости $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ и воспользоваться интегралом Коши:

$$p(x,y,t) + \rho g y + \frac{\rho v^2(x,y,t)}{2} + \rho \frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial t} = F(t) .$$

Определяя константу из граничных условий на поверхности $p(x,h(x,t),t) = p_0$, получим

$$p(x,y,t) + \rho g y + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p_0 + \rho g h + \rho \frac{\partial \varphi(x,h(x,t),t)}{\partial t} ,$$

так как скорость (по предположению о характере течения) не зависит от y. Если на бесконечности поверхность жидкости не возмущена, то $h(x,t) \equiv h_0$. Функцию $f(t) = \frac{\partial \varphi(x,h_0,t)}{\partial t} = 0$ можно положить равной нулю (?), так как $v_\infty = \frac{\partial \varphi(x,h_0,t)}{\partial x} = const$ - не зависит от времени. Тогда

$$p(x,y,t) = p_0 + \rho g(h_0 - y) - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} .$$

Поскольку мы учитываем только горизонтальную скорость течения идеальной жидкости $\tau_{ik} = -p\delta_{ik}$, общее выражение теоремы

$$\frac{\partial P_i(t)}{\partial t} = -\oiint_{\Sigma} \Pi_{ik} d\sigma_k + \int_V f_i dV$$

упрощается, так как $i = 1$ (P_x):

$$\frac{\partial P_x(t)}{\partial t} = -\oiint_{\Sigma} \Pi_{xk} d\sigma_k$$

Здесь $\Pi_{ik} = \rho(v_i v_k + p\delta_{ik})$ - тензор плотности потока импульса.

Выполняя интегрирование по замкнутой поверхности, получим:

$$\rho \oiint_{\Sigma} v_x^2(x,y,t) ds_x = -\rho v_x^2(x_1,t)h_1 + \rho v_x^2(x_2,t)h_2 ,$$

$$\rho g \oint_{\Sigma} y(x,y,t)\,ds_x = -\rho g \int_0^{h_1} (h_0 - y)\,dy + \rho g \int_0^{h_2} (h_0 - y)\,dy = \rho g (h_2 - h_1)\left[h_0 + \left(\frac{h_2 + h_1}{2}\right)\right],$$

$$\rho \oint_{\Sigma} \frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial t}\,ds_x = -\rho\left\{\int_0^{h_2} \frac{\partial \varphi(x_2,y,t)}{\partial t}\,dy - \int_0^{h_1} \frac{\partial \varphi(x_1,y,t)}{\partial t}\,dy\right\}$$

$$p_0 \oint_{\Sigma} ds_x = 0 .$$

Отсюда $\dfrac{\partial P_x(t)}{\partial t} = -\rho\left(v_2^2 h_2 - v_1^2 h_1\right) - \dfrac{\rho g}{2}\left(h_2^2 - h_1^2\right) - \rho g h_0 (h_2 - h_1) + \rho \oint_{\Sigma} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\,ds_x$.

Переходя к пределу $x_2 = x_1 + dx$, получим дифференциальные уравнения непрерывности и изменения импульса (аналог уравнения Эйлера в редуцированной задаче):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial (hv)}{\partial t} + \frac{\partial \left(hv^2\right)}{\partial x} + \frac{\rho g}{2}\frac{\partial \left(h^2\right)}{\partial x} - \rho g h_0 \frac{\partial h}{\partial x} - \rho \frac{\partial}{\partial t}\{v_2 h_2 - v_1 h_1\} = 0 .$$

С помощью уравнения непрерывности уравнение Эйлера можно упростить, учитывая

$$\frac{\partial (hv)}{\partial t} + \frac{\partial \left(hv^2\right)}{\partial x} = v\left\{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv)}{\partial x}\right\} + h\left\{\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right\} = h\left\{\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right\},$$

$$\frac{\rho g}{2}\frac{\partial \left(h^2\right)}{\partial x} = \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} .$$

Получим систему

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 .$$

Сравним ее с системой уравнений для идеального газа в адиабатном процессе $p(\rho) = p_0\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$. Уравнение непрерывности для газа переменной плотности и уравнение Эйлера при одномерном течении имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0 , \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

Выполняя дифференцирование давления, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \rho^{\gamma-2}\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 .$$

При $\gamma = 2$ уравнение Эйлера для газа упрощается, что приводит к системе

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0 , \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2p_0}{\rho_0^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 ,$$

которая совпадает редуцированной системой для «мелкой воды» в канале, при замене

$$\rho \to y, \quad \frac{2p_0}{\rho_0^2} \to \rho g .$$

Интегральные теоремы (модификация)

Другой подход может быть основан на применении интегральных теорем об изменении массы импульса и энергии, поскольку скорость в любой точке сечения мы считаем одинаковой, а течение – одномерным.

Тогда рис….изменение массы, импульса и полной энергии в выделенном объеме, заданном сечениями x_1 и x_2 и поверхностью жидкости, определяется системмой уравнений:

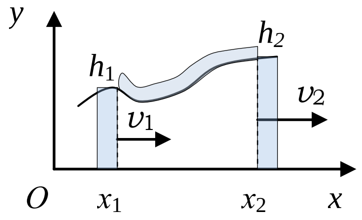

Рис.

1. Уравнение непрерывности
$$dm = m_1 - m_2 = \rho\left(v_1 h_1 - v_2 h_2\right) dt$$
2.
где $dm = \rho \int\limits_{x_1}^{x_2} dx\left(h\left(x,t_2\right) - h\left(x,t_1\right)\right)$

2. Изменение импульса

$$dP = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\rho v\left(t_2,x\right)h\left(t_2,x\right) - \rho v\left(t_1,x\right)h\left(t_1,x\right)\right)dx = \rho\left(v_1^2 h_1 - v_2^2 h_2\right)dt + \left(F_1 - F_2\right)dt,$$

где $F_1 = \int\limits_0^{h_1} p\left(x_1,y\right)dy$, $F_2 = \int\limits_0^{h_2} p\left(x_2,y\right)dy$.

3. Изменение полной энергии

$$dE = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\left(\rho\frac{v^2\left(t_2,x\right)}{2}h\left(t_2,x\right) + \rho g\frac{h^2\left(t_2,x\right)}{2}\right) - \left(\rho\frac{v^2\left(t_1,x\right)}{2} + \rho g\frac{h^2\left(t_1,x\right)}{2}\right)h\left(t_1,x\right)\right)dx =$$

$$= \rho\left(\left(\frac{v_1^2 h_1}{2} + g\frac{h^2\left(t_1,x\right)}{2}\right)v_1 - \left(\frac{v_2^2 h_2}{2} + g\frac{h^2\left(t_2,x\right)}{2}\right)v_2\right)dt + \left(F_1 v_1 - F_2 v_2\right)dt$$

Переходя к пределу $x_2 = x_1 + dx$, и $t_2 = t_1 + dt$, получим систему уравнений «мелкой воды»:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial\left(v^2 h\right)}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\left[\left(v^2 + gh\right)h\right]}{\partial t} + \frac{\partial\left[v\left(v^2 + gh\right)h\right]}{\partial x} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial(Fv)}{\partial x} = 0.$$

Здесь величина $F\left(x,t\right) = \int\limits_0^{h(x,t)} p\left(x,y\right)dy$ должна рассчитываться, как и прежде, при помощи интеграла Коши, если рассматривается потенциальное течение.

Метод Лагранжа (вариационный принцип)

И наконец, можно использовать метод Лагранжа для систем с идеальными связями. Для этого вычислим кинетическую и потенциальную энергию системы как функцию *лагранжевой координаты* q_i. Пусть положение частицы задано лагранжевой координатой $\vec{q} = \left(\xi,\eta\right)$, так что $\vec{r}\left(t\right) = \vec{r}_0 + \vec{q}\left(\vec{r}_0,t\right)$. Здесь нумерация частиц осуществляется по их начальному положению. Соответственно, $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{q}}\left(\vec{r}_0,t\right)$ - скорость частицы. Для элементарного объема V масса остается постоянной, но при движении возможны деформации, удовлетворяющие уравнению непрерывности.

На частицу действует сила тяжести $\vec{f}_A = \rho\vec{g}V = m\vec{g}$, определяемае ее положением – активная сила, а также контактные силы давления со стороны соседних частиц - силы реакции. Суммарное воздействие этих сил приводит к изменению импульса частицы:

$$d\left(m\dot{\vec{r}}\right) = m\vec{g}dt - \oiint\limits_{\Sigma} p d\vec{s} = m\vec{g}dt - \vec{\nabla}pV = m\left(\vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right)dt = \vec{f}_A dt + \vec{f}_R dt.$$

Используя тензроные обозначения $\vec{r}=\{x_i\}$, найдем проекции уравнения движения на направление $\delta x_i=\delta x_{i0}+\dfrac{\partial q_i}{\partial x_{k0}}\delta x_{k0}$, порождаемое вариацией «обобщенных координат» $\vec{q}=(\xi,\eta)$, определяющих положение точки в выбранный момент времени как функцию «номера» точки – начальной координаты.

Для дискретного набора точек это действие выглядело так:

$$\delta\vec{r}_a\frac{d}{dt}\left(m_a\dot{\vec{r}}_a\right)=\frac{d}{dt}\left(m_a\dot{\vec{r}}_a\cdot\delta\vec{r}_a\right)-\left(m_a\dot{\vec{r}}_a\cdot\delta\dot{\vec{r}}_a\right)=\left(\vec{f}_a^{\,A}\cdot\delta\vec{r}_a\right)+\left(\vec{f}_a^{\,R}\cdot\delta\vec{r}_a\right)$$

и приводило к уравнению для точки с номером a

$$\frac{d}{dt}\left(m_a\dot{\vec{r}}_a\cdot\delta\vec{r}_a\right)=\delta\left(\frac{m_a\dot{\vec{r}}_a^{\,2}}{2}\right)=\left(\vec{f}_a^{\,A}\cdot\delta\vec{r}_a\right)+\left(\vec{f}_a^{\,R}\cdot\delta\vec{r}_a\right)$$

Интегрируя его по времени с условиями для вариаций $\delta\vec{r}\left(t_{1,2}\right)=0$, избавляемся от производной по времени, и получаем выражение для одной частицы

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{\delta\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}\right)+\left(\vec{f}_A\cdot\delta\vec{r}\right)+\left(\vec{f}_R\cdot\delta\vec{r}\right)\right\}=0.$$

Суммирование уравнений для всех частиц позволяет исключить силы реакции связей, если система идеальна, т.е. в случае $\sum\limits_a\left(\vec{f}_a^{\,R}\cdot\delta\vec{r}_a\right)=0$

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_a\left\{\delta\left(\frac{m_a\dot{\vec{r}}_a^{\,2}}{2}\right)+\left(\vec{f}_a^{\,A}\cdot\delta\vec{r}_a\right)\right\}=0.$$

Для потенциальных сил сумма проекций выражается в виде вариации от потенциальной энергии взаимодействия частиц и энергии во внешних полях

$$\sum_a\left(\vec{f}_a^{\,A}\cdot\delta\vec{r}_a\right)=-\delta U,$$

что приводит к уравнению вида

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_a\left\{\delta\left(\frac{m_a\dot{\vec{r}}_a^{\,2}}{2}\right)-\delta U\right\}=0,$$

который и рассматривается, как вариационный принцип.

Получить из вариационного принципа уравнения движения частиц можно лишь в том случае, когда все вариации динамических переменных q_{i} являются *независимыми*, поэтому в динамике систем с идеальными связями часто ограничиваются только голономными системами, для которых все динамические переменные выбираются независимыми до интегрирования уравнений движения. В случае неголономных систем уравнения связей записываются только для дифференциальных соотношений, которые не могут быть выражены в виде конечных соотношений до интегрирования задаич динамики. В этом случае вариационный принцип реализует *условный экстермум* функционала.

Переход к вариационному принципу в механике сплошной среды проводится путем замены суммирования по индексу интегрированием по элементарным массам $m_a\to\rho d^3\vec{r}$

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_V d^3\vec{r}\,\delta\left(\frac{\rho\dot{\vec{r}}\left(\vec{r},t\right)}{2}\right)-\delta U=0\ .$$

Вернемся к задаче о движении жидкости в канале, полагая скорость течения одномерной.

Для выполнения вычислений учтем соотношение между введенными обобщенными координатами $\vec{q}=(\xi,\eta)$ и декартовыми координатами точки $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{q}\left(\vec{r}_0,t\right)$, и перейдем к интегрированию по начальному объему, не зависящему от времени. В рассматриваемом случае квазиодномерного движения $x(x_0,t)=x_0+q(x_0,t)$, и $dx=\left(1+\frac{\partial q}{\partial x_0}\right)dx_0$. Независимые вариации $\delta q=\delta q(x_0)$ выбираются для каждой элементарной массы, заданной в начальный момент своей координатой x_0.Сохранение этой элементарной массы обеспечивается выполнением условия $\rho h_0 dx_0=\rho h(x,t)dx=\rho h(x,t)\left(1+\frac{\partial q}{\partial x_0}\right)dx_0$ в подынтегральном выражении.

$$T=\frac{\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 h(t,x)\frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0,\quad U=\frac{\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2}h^2(x,t)\frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0,\quad L=\frac{\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2-h\right)h\frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0.$$

Динамическими переменными редуцированной задачи могут быть q, h, но они не являются независимыми, поэтому варьирование по ним не приведет к уравнениям движения. Связь между этими переменными устананавливается с помощью уравнения непрерывности:

$$\delta h\frac{\partial x}{\partial x_0}+\frac{\partial}{\partial x_0}(h\delta x)=0.$$

Искать экстремум функционала

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\delta\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2-h\right)\frac{\partial x}{\partial x_0}hdx=0$$

при наложенных неголономных связях удобно при помощи метода неопределенных множителей Лагранжа λ. Проинтегрируем уравнение непрерывности по координате и времени, и прибавим к функционалу, умножив на «неоределенный множитель» λ:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\delta\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}\left(h\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2-h^2\right)\frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0+\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}\lambda\left(\delta h\frac{\partial x}{\partial x_0}+\frac{\partial}{\partial x_0}(h\delta x)\right)\frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0=0$$

Теперь можно варьировать по всем переменным, как независимым, включая и неопределенный множитель, (чтобы не забыть уравнение связи).
Интегрирование по частям позволяет выделить независимые вариациии $\delta q,\ \delta h,\ \delta\lambda$ в подынтегральном выражении:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\delta\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}\left(\left[-2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial x_0}\left(h\frac{\partial x}{\partial t}\right)-h\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)\right]\delta x+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2-h+\lambda\right]\delta h\right)\frac{\partial x}{\partial x_0}dx_0+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}\delta\lambda\frac{\partial x}{\partial x_0}\left(\delta h+\frac{\partial}{\partial x_0}(h\delta x)\right)dx_0=0$$

Приравнивая коэффициенты при независимых вариациях нулю, получим систему уравнений:

$$-2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial x_0}\left(h\frac{\partial x}{\partial t}\right)-h\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)=0\qquad\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2-h+\lambda\frac{\partial x}{\partial x_0}=0,$$

которая вместе с уравнением непрерывности $\delta h\frac{\partial x}{\partial x_0}+\frac{\partial}{\partial x_0}(h\delta x)=0$ образует полную систему.