Экзаменационные вопросы по Теоретической механике
(3-й курс, 2-й поток; январь 2020)

Движение механических систем при наложенных связях. Голономные связи. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера.

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями (1-го рода). Законы сохранения для механических систем при наличии связей.

Уравнения Лагранжа в независимых координатах (вывод из общего уравнения механики).

Механическая система с одной степенью свободы. Интегралы движения. Качественное исследование. Движение вблизи точек остановки. Формула для периода колебаний.

Одномерный гармонический осциллятор. Собственные и вынужденные колебания одномерного гармонического осциллятора. Функция Лагранжа. Фазовая плоскость. Затухающие одномерные колебания. Условный период. Апериодический режим движения.

Общие свойства движения частицы в центральном поле. Интегралы движения и общее решение задачи в квадратурах. Качественное исследование. Точки поворота. Классификация траекторий. Формулы для периода радиального движения частицы и смещения перигея траектории частицы в центральном поле. Условие замкнутости траекторий. Задача Кеплера. Вектор-интеграл Лапласа.

Система материальных точек. Внутренние силы. Инвариантность функции Лагранжа замкнутой системы N материальных точек относительно преобразований «группы движений Галилея». Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и энергии системы точек. Аддитивные интегралы движения замкнутой системы N материальных точек и свойства пространства-времени. Инвариантность функции Лагранжа системы относительно преобразований Галилея и инерциальные системы отсчета.

Задача двух тел; интегралы движения и общее решение задачи в квадратурах. Движение частиц относительно лабораторной системы отсчета и системы центра масс. Упругое рассеяние частиц. Эффективное поперечное сечение рассеяния. Рассеяние электрически заряженных частиц - формула Резерфорда. Дифференциальное и полное сечение рассеяния частиц на сферически симметричной потенциальной яме. Рассеяние частиц на малые углы. Падение частиц в центр поля и захват частиц. Полное сечение захвата частиц.

Уравнения Лагранжа в независимых координатах и их ковариантность при точечных преобразованиях. Обобщенный импульс и обобщенная энергия. Интегралы движения уравнений Лагранжа.

Функция Лагранжа заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Обобщенный потенциал, обобщенная сила. Уравнения Лагранжа и первые интегралы уравнений Лагранжа заряда e, массы m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$ в декартовых (в зависимости от калибровки векторного потенциала) и в цилиндрических координатах.

Малые колебания динамических систем с s степенями свободы. Устойчивость движения по Ляпунову. Теорема Лагранжа. Собственные колебания механической системы с s степенями свободы. Общее решение уравнений Лагранжа механической системы с s степенями свободы вблизи положений устойчивого равновесия. Нормальные колебания; нормальные координаты. Случаи нулевой и кратных частот. Векторы смещений. Ортогональность амплитуд нормальных колебаний.

Интегральные принципы механики. Действие. Экстремали действия и уравнения Лагранжа. Принцип наименьшего действия в пространстве конфигураций.

Невырожденные лагранжианы. Преобразования Лежандра и представление уравнений Лагранжа в эквивалентной форме уравнений Гамильтона.

Принцип наименьшего действия в расширенном фазовом пространстве; вывод уравнений Гамильтона. Фазовое пространство. Фазовый поток.

Циклическая координата. Интегрирование уравнений Гамильтона с одной циклической циклической координатой; консервативная система с двумя степенями свободы и одной циклической координатой.

Функция Гамильтона заряда e, массы m во внешнем электромагнитном поле. Уравнения Гамильтона и интегралы движения этих уравнений для заряда e, массы m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$ в декартовых и в цилидрических координатах.

Скобки Пуассона и интегралы движения; свойства скобок Пуассона. Интегралы движения в задаче Кеплера. Теорема Пуассона.

Канонические преобразования. Основное уравнение канонических преобразований (вывод). Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана. Производящие функции канонических преобразований и формулы преобразований. Бесконечно-малые канонические преобразования. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Инварианты канонических преобразований.

Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и решения канонических уравнений. Действие с переменным верхним пределом и уравнение Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби. Метод разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для двумерного неизотропного гармонического осциллятора и для движения частицы массы m в центральном поле $U(\mathbf{r}) = - a/r + b/r^2$, $a, b>0$, в плоскости движения.

Укороченное действие. Переменные «действие-угол». Условно-периодическое движение. Нахождение частот условно-периодического движения с помощью переменных действия для двумерного неизотропного и изотропного гармонического осциллятора и для частицы массы m в центральном поле $U(\mathbf{r}) = - a/r + b/r^2$, $a, b>0$. Траектории на карте угловых переменных на примерах двумерного неизотропного и изотропного гармонического осциллятора. Независимость (несоизмеримость) частот условно-периодического движения и однозначные интегралы движения.

Полностью вырожденное движение. Переменные «действие-угол» двумерного изотропного осциллятора в декартовых координатах; траектории на карте угловых переменных. Переменные «действия» и частоты при движении частицы массы m в центральном поле $U(\mathbf{r}) = - a/r$, $a>0$ в плоскости движения; траектории на карте угловых переменных. Однозначные интегралы движения на примере двумерного изотропного гармонического осциллятора в декартовых и полярных координатах.

Механические системы с медленно меняющимися параметрами. Адиабатическая инвариантность переменных действия. Асимптотический эффект: зависимость энергии частицы в центральном поле от обобщенного импульса при медленном включении однородного магнитного поля.

Углы Эйлера. Угловая скорость твердого тела. Кинематические уравнения Эйлера. Импульс, момент импульса и кинетическая энергия твердого тела. Тензор инерции твердого

тела и его свойства; главные оси инерции. Функция Лагранжа тяжелого симметрического волчка с неподвижной точкой; интегралы движения. Качественное исследование и решение задачи в квадратурах.

Описание сплошной среды; основная гипотеза и свойства, Элементарный объем, физически бесконечно малая частица. Поле перемещений. Тензоры и векторы полей поворотов и деформаций. Поле скоростей. Тензоры и векторы, характеризующие поля вихря и скорости деформаций.

Объемные и поверхностные силы. Тензор локальных напряжений. Уравнения движения сплошной среды. Замкнутая система уравнений для баротропного движения идеальной жидкости. Уравнение Эйлера. Изэнтропическое движение идеальной жидкости. Уравнение изэнтропического движения идеальной жидкости в векторной форме. Стационарное и потенциальное (безвихревое) течения. Уравнения (интегралы) Бернулли и Коши.

Сжимаемая идеальная жидкость. Распространение возмущений (полей плотности, давления, скорости) в сжимаемой идеальной жидкости. Звуковые волны и их характеристики.

Касательные напряжения в движущейся жидкости. Тензор локальных напряжений "линейной" вязкой жидкости. Уравнение Навье-Стокса; основное отличие от уравнения Эйлера. Уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости. Геометрически (динамически)-подобные течения; закон подобия. Число Рейнольдса.

Литература.

1. И.И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. Изд. МГУ, 1974.
2. В.В. Петкевич. Теоретическая механика. Изд. Наука (ГИФМЛ), 1981.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. Изд. Наука (ГИФМЛ), 1988.
4. Ю.Г. Павленко. Лекции по теоретической механике. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
5. В.Р. Халилов, Г.А. Чижов. Теоретическая механика: Динамика классических систем. Изд. Юрайт, 2017.
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. Изд. Наука (ГИФМЛ), 1986 (отдельные параграфы).