Классическая теория поля

Глава I. Электродинамика с внешним источником

Уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \end{cases} \text{ без источников}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\bar{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}\bar{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases} \text{ с источниками}$$

При этом должен удовлетворять ур-ю непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

Ур-я Максвелла без источников можно решить введя потенциалы эл/м поля:

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0 \longrightarrow \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}\left(\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0 \longrightarrow \bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\bar{\nabla}\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \bar{\nabla}\varphi \end{cases}$$

где φ - скалярный потенциал, а $\vec{A}$ - векторный потенциал эл/м поля

Потенциалы эл/м поля определены неоднозначно: 2

Если

$$(*)\quad \begin{cases} \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha \\ \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t} \end{cases}$$

где $\alpha = \alpha(t, \bar{r})$ - функция координат и времени, то

$$\vec{H} \to \mathrm{rot}(\vec{A} + \bar{\nabla}\alpha) = \mathrm{rot}\vec{A} = \vec{H}$$

$$\vec{E} \to -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \cancel{\bar{\nabla}\alpha}) - \bar{\nabla}\left(\varphi - \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} - \bar{\nabla}\varphi = \bar{E}$$

– электрическое и магнитное поле инвариантны при калибровочных преобразованиях (*).

Удобно сформулировать эл/д так, чтобы Лоренц-симметрия была бы явной. Для этого строят 4-х мерное пространство-время с координатами

$x^\mu \equiv (ct, \vec{r})$ и метрикой

$$\eta^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

(Сигнатура $(+---)$) $\mu = \overline{0,3}$

Тогда

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

Если построить вектор $A_\mu \equiv (\varphi, -\vec{A})$, то калибровочные преобразования можно записать в виде

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha, \quad \text{действ.,} \quad \begin{cases} \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ -\vec{A} \to -\vec{A} - \bar{\nabla}\alpha \end{cases}$$

т.о. $A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$ – 4-вектор как и ∂_μ. ③

Индекс можно поднять:

$$A^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} A_\nu = (\varphi, +\vec{A}) \qquad A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$$

Скалярное произведение 4-х векторов

$$(A, B) = A_\mu \eta^{\mu\nu} B_\nu = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A_0 B_0 - \vec{A}\vec{B}$$

если $A^\mu = (A_0, \vec{A})$; $B^\mu = (B_0, \vec{B})$.

Электрическое и магнитное поле являются компонентами тензора поля

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}$$

Действительно, например,

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-A_x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x$$

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\frac{\partial}{\partial x} A_y + \frac{\partial}{\partial y} A_x = -H_z$$

$$\overline{H} = \operatorname{rot} \overline{A} = \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

При этом тензор поля калибровочно инвариантен,

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu (A_\nu - \cancel{\partial_\nu \alpha}) - \partial_\nu (A_\mu - \cancel{\partial_\mu \alpha}) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

Уравнения Максвелла с источниками можно записать в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \text{где} \quad j^\nu \equiv (c\rho, \vec{j})$$

Действительно, при $\nu = 0$

$$\partial_i F^{i0} \overset{?}{=} \frac{4\pi}{c} j^0 = 4\pi\rho$$

$$\parallel$$

$$-\partial_i F_{i0} = \partial_i F_{0i} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{E}$$

– верно.

При $\nu = n = \overline{1,3}$

$$\partial_\mu F^{\mu n} \overset{?}{=} \frac{4\pi}{c} j^n$$ Рассмотрим случай $n=1$:

$$\partial_\mu F^{\mu 1} \overset{?}{=} \frac{4\pi}{c} j^1 = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_0 F^{01} + \underbrace{\cancel{\partial_1 F^{11}}}_{0} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} =$$

$$= -\partial_0 F_{01} + \partial_2 F_{21} + \partial_3 F_{31} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} E_x + \frac{\partial}{\partial y} H_z + \frac{\partial}{\partial z}(-H_y)$$

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \Rightarrow (\operatorname{rot} \overline{H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + (\operatorname{rot} \overline{H})_x = \frac{4\pi}{c} j_x$$

– первая компонента ур-я $\operatorname{rot} \overline{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$.

В силу ур-я $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$ ток j^ν является 4-х вектором.

Легко убедиться, что он удовлетворяет ур-ю непрерывности:

$$\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{симм. тензор}} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu$$

антисимм. тензор

$$S_{(\mu\nu)} A^{[\mu\nu]} = S_{(\nu\mu)} \left(-A^{[\nu\mu]}\right) = -S_{(\mu\nu)} A^{[\mu\nu]} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\nu j^\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + \vec{\nabla} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}.$$

Как записать ур-я Максвелла без источников?

$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ - полностью антисимм. тензор,

$\varepsilon^{0123} = +1; \quad \varepsilon_{0123} = -1.$

Дуальный тензор поля

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ +H_x & 0 & E_z & -E_y \\ +H_y & -E_z & 0 & E_x \\ +H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Например,

$$\tilde{F}^{01} = \varepsilon^{0123} F_{23} = F_{23} = -H_x$$

$$\tilde{F}^{12} = \varepsilon^{1203} F_{03} = F_{03} = E_z$$

тогда ур-я Максвелла без источников будут

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad :$$

$$\nu = 0: \quad \partial_i \tilde{F}^{i0} = 0 \longrightarrow \operatorname{div} \bar{H} = 0$$

$$\nu = 1: \quad 0 = \partial_0 \tilde{F}^{01} + \partial_2 \tilde{F}^{21} + \partial_3 \tilde{F}^{31} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-H_y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(-E_z) + \frac{\partial}{\partial z} E_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} - (\operatorname{rot} \bar{E})_y$$

– верно.

Очевидно, что эти ур-я выполняются, т.к.

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0$$

как свёртка симметричного и антисимметричного тензоров.

Глава II. Лагранжев формализм в теории поля

§ 1. Уравнения Лагранжа в теории поля

В механике ур-я Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{где } L = L(q_i, \dot{q}_i, t) -$$

ф-я Лагранжа.

В теории поля обобщёнными координатами являются значения полей в точках 3-мерного пр-ва $\Longrightarrow$ число степеней свободы бесконечно;

$\varphi_i(t, \vec{r})$

нумеруют обобщённые координаты.

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L \quad ; \quad L = c\int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$$

$\Rightarrow \; S = \int d^4x\, \mathcal{L}$ где $\mathcal{L}$ - плотность ф-и Лагранжа.

Для получения ур-й движения воспользуемся принципом экстремального действия:

$$0 = \delta S = \int d^4x \left[\mathcal{L}(\varphi_i + \delta\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i + \partial_\mu \delta\varphi_i) - \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) \right]$$

$$= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta\varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \partial_\mu \delta\varphi_i \right] =$$

$$= \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta\varphi_i \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) \delta\varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta\varphi_i \right]$$

$$= \underset{\text{граница}}{\oint} dS_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \delta\varphi_i + \int d^4x\, \delta\varphi_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) \right]$$

Требуя (как и в механике), чтобы φ_i было бы фиксированным на границе (т.е. $\delta\varphi_i \big|_{\text{гран.}} = 0$) получаем

$$0 = \delta S = \int d^4x\, \delta\varphi_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) \right]$$

В силу произвольности $\delta\varphi_i$

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}$$ – ур-я Лагранжа в теории поля.

§ 2. Формулировка эл./д. с внешним источником на лагранжевом языке

Важно: полевыми переменными являются не поля, а потенциалы A_μ.

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu \right]$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (т.ч. $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ автоматически)

Ур-я Лагранжа принимают вид ($\varphi_i \to A_\nu$)

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

При этом

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c^2} \delta^\nu_\mu j^\mu = -\frac{1}{c^2} j^\nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{8\pi c} F^{\alpha\beta} \left(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha \right)$$

$$= -\frac{1}{8\pi c} \left(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} \right) = -\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu}$$

Поэтому

$$0 = -\frac{1}{4\pi c}\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} j^\nu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$ – ур-я Максвелла получаются как ур-я Лагранжа.

Действие инвариантно относительно калибровочных преобразований с точностью до интеграла от 4-х дивиргенции:

$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$, а

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu\right) \longrightarrow \int d^4x \left(-\frac{1}{c^2}\right) j^\mu \left(A_\mu - \partial_\mu \alpha\right)$$

т.ч. $$\delta S = \int d^4x \, \frac{1}{c^2} j^\mu \partial_\mu \alpha = \frac{1}{c^2}\int d^4x \left[\partial_\mu (j^\mu \alpha) - \underbrace{\cancel{\partial_\mu j^\mu}}_{0} \cdot \alpha\right]$$

$$= \frac{1}{c^2}\int d^4x \, \partial_\mu (j^\mu \alpha)$$

Д/З доказать, что ур-я Лагранжа в теории поля не меняются если $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(\varphi_i; x)$

(аналог $L \to L + \frac{df}{dt}$).

§ 3. Используемая система единиц

Удобно использовать систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Тогда все величины имеют размерность массы:

$$[v] = 1 \qquad [\vec{p}] = [m\vec{v}] = m \qquad [E] = [mc^2] = m$$

$$[x] = \frac{[\hbar]}{[p]} = m^{-1} \qquad [t] = \frac{[\hbar]}{[E]} = m^{-1}$$

$$[\partial_\mu] = \frac{1}{[x^\mu]} = m$$

$$[S] = [\hbar] = 1 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{L}] = \frac{[S]}{[x^4]} = m^4$$

$$[F_{\mu\nu}] = m^2 \qquad [A_\mu] = m \qquad [j^\mu] = m^3$$

$$[\alpha] = \left[\frac{e^2}{\hbar c}\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad [e] = 1$$

$$\left(\rho = q \cdot \delta^3(\bar{r}) \quad \Rightarrow \quad [\rho] = m^3 = [q] \cdot m^3 \ \text{– верно} \right)$$

Гравитационная постоянная

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad\qquad [a] = \left[\frac{1}{x}\right] = m$$

$$[ma] = [G] \cdot m^4 \quad \Rightarrow \quad [G] = m^2/m^4 = m^{-2}$$

Д/З построить из G, $\hbar$, c величину размерности энергии и найти её величину.

Кроме того удобно сделать замену

$$A_\mu \to \sqrt{4\pi}\, A_\mu\,; \quad e \to \frac{e}{\sqrt{4\pi}}$$

после которой

$$S \equiv -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \int d^4x\, j^\mu A_\mu$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$$

§4. Сохранение тензора энергии-импульса

В механике

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Если $L = L(q_i, \dot q_i) \neq$
$\neq L(t)$, то

$$E \equiv \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L = \text{const}$$

– закон сохранения обобщённой энергии.

Эквивалентно,

$$\frac{d}{dt}E = 0$$

В теории поля

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i) \neq \mathcal{L}(x^\mu).$$

Что будет являться аналогом закона сохранения обобщённой энергии?

Убедимся, что величина

$$T^{\mu}_{\cdot\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\partial_\nu \varphi_i - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}$$

– т.н. канонический ТЭИ удовлетворяет з-ну сохранения $0 = \partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu}$.

Действительно,

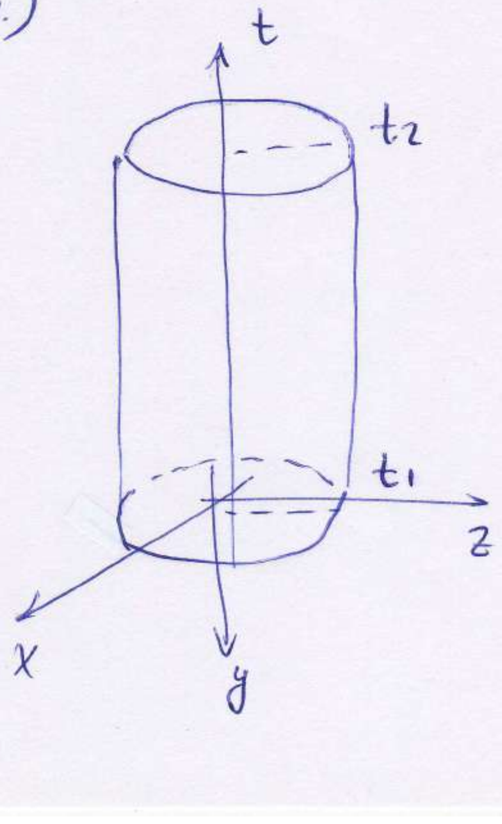
$$\partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu} = \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\partial_\nu \varphi_i - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}\right] =$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\right)\partial_\nu \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i - \partial_\nu \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu\varphi_i) =$$

$$\overset{\text{УЛ}}{=} \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}\partial_\nu \varphi_i} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}\partial_\nu \varphi_i} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)}\partial_\nu\partial_\mu\varphi_i}$$

$$= 0$$

Проинтегрируем равенство $0 = \partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu}$ по 4-х мерному цилиндру (см. рис.)



$$0 = \int d^4x\, \partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu} = \oint dS_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu}$$

= (предполагаем, что на простр. бесконечности поля быстро убывают) =

$$= \int\limits_{t=t_2} d^3x\, T^{0}_{\cdot\nu} - \int\limits_{t=t_1} d^3x\, T^{0}_{\cdot\nu}$$

Поэтому

$$0 = \frac{dP^\nu}{dt} \quad \text{где} \quad P^\nu \equiv \int d^3x\, T^{0\nu}$$

При этом

$$P^0 = \int d^3x\, T^{00} = \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_i)} \partial_0 \varphi_i - \mathcal{L} \right\} =$$

$$= \sum_{\substack{\text{обобщ.} \\ \text{коорд.}}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad \text{где} \quad L = \int d^3x\, \mathcal{L}$$

$\Rightarrow P^0 = E$ – обобщённая энергия в теории поля.

т.к. $P^\mu = (E, \vec{P})$, то

$P^i = \int d^3x\, T^{0i}$ – импульс в теории поля.

§5. Тензор энергии-импульса для эл./д.

Рассмотрим эл./д. без внешних источников, которая описывается

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \quad \text{где} \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

тогда

$$T^{\mu}_{\cdot\,\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial_\nu A_\alpha - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad \text{– канонический ТЭИ.}$$

При этом $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = -F^{\mu\alpha}$ и $\Rightarrow$

$$T^{\mu}_{\cdot\nu} = -F^{\mu\alpha}\partial_\nu A_\alpha + \delta^{\mu}_{\nu}\cdot\frac{1}{4}F^2_{\alpha\beta}$$

— эта величина не является калибровочно инвариантной — плохо.

Определим симметризованный ТЭИ

$$\Theta^{\mu}_{\cdot\nu} \equiv T^{\mu}_{\cdot\nu} + \partial_\alpha A_\nu \cdot F^{\mu\alpha} =$$

$$= -F^{\mu\alpha}(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) + \frac{1}{4}F^2_{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\nu} = -F^{\mu\alpha}F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\nu}F^2_{\alpha\beta}$$

— этот ТЭИ уже будет являться калибровочно инвариантным.

Он удовлетворяет з-ну сохранения

$$\partial_\mu \Theta^{\mu}_{\cdot\nu} = 0, \quad \text{т.к.}$$

сохранение канонического ТЭИ

$$\partial_\mu \Theta^{\mu}_{\cdot\nu} = \partial_\mu\left[T^{\mu}_{\cdot\nu} + \partial_\alpha A_\nu\cdot F^{\mu\alpha}\right] = \cancel{\partial_\mu T^{\mu}_{\cdot\nu}} + \underbrace{\cancel{\partial_\mu\partial_\alpha A_\nu F^{\mu\alpha}}}_{0}$$

$$+ \partial_\alpha A_\nu \cdot \underbrace{\cancel{\partial_\mu F^{\mu\nu}}}_{\text{ур-я движения}} = 0$$

Кроме того

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\cdot\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2_{\alpha\beta} = -F^{\nu\alpha}F^{\mu}_{\cdot\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\nu\mu}F^2_{\alpha\beta} = \Theta^{\nu\mu}$$

— симметричен по μ и ν (отсюда и название).

$$\Theta^{\mu}_{\cdot\mu} = -F^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\cdot 4F^2_{\alpha\beta} = 0$$ — также не случайное свойство.

Вычислим теперь плотность энергии и плотность импульса для эл./м поля.

Плотность энергии

$$\Theta^{00} = -F^{0\alpha}F^{0}_{\cdot\alpha} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^{2} = -F^{0i}F^{0}_{\cdot i} + \frac{1}{4}\left(F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F_{ij}F^{ij}\right) = F_{0i}^{2} - \frac{1}{2}F_{0i}^{2} + \frac{1}{4}F_{ij}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}F_{0i}^{2} + \frac{1}{4}F_{ij}^{2} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^{2} + \vec{H}^{2}\right)$$

(В эл./д. эта величина записывалась как $\frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^{2} + \vec{H}^{2}\right)$ – отличие из масштабирования потенциала в $\sqrt{4\pi}$ раз).

Плотность импульса, компонента $P^{1} = \Theta^{01}$

$$\Theta^{01} = -F^{0\alpha}\cdot F^{1}_{\cdot\alpha} + \frac{1}{4}\cancelto{0}{\eta^{01}}F_{\alpha\beta}^{2} = -F^{02}F^{1}_{\cdot 2} - F^{03}F^{1}_{\cdot 3} =$$

$$= -F_{02}F_{12} - F_{03}F_{13} = -E_y\cdot(-H_z) - E_z\cdot H_y = [\bar{E}\times\bar{H}]_x$$

где мы приняли во внимание, что

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad [\bar{E}\times\bar{H}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ мы получили нулевую компоненту вектора Умова-Пойнтинга $[\bar{E}\times\bar{H}]$ (Ранее $\frac{c}{4\pi}[\bar{E}\times\bar{H}]$).

Глава III. Теории со скалярными полями.

§1. Комплексное скалярное поле.

Эл./м. поле A_μ - не самый простой пример. Можно рассмотреть более простой случай скалярного поля $\phi = \phi(x)$, т.ч. при преобразованиях Лоренца

$$\phi'(x') = \phi(x).$$

Тогда можно попробовать описывать его

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \qquad \Longrightarrow [\phi] = m$$

где V - некоторая Re функция. Тогда $\varphi_i = (\phi, \phi^*)$ и УЛ запишутся в виде

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \qquad 0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*}$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \partial^\mu \phi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -V'(\phi^* \phi) \cdot \phi$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \partial_\mu \partial^\mu \phi + V'(\phi^* \phi) \cdot \phi$$

Первое уравнение аналогичным образом даёт

$$0 = \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + V'(\phi^* \phi) \cdot \phi^*$$ – получается просто комплексно сопряжённое уравнение.

Важный частный случай:

$$V(\phi^*\phi) = m^2\phi^*\phi \text{ , т.е.}$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi.$$

Соответствующие ур-я движения имеют вид

$$\begin{cases} \partial_\mu^2\phi + m^2\phi = 0 & \text{— уравнение Клейна-Гордона-Фока} \\ \partial_\mu^2\phi^* + m^2\phi^* = 0 \end{cases}$$

где $\partial_\mu^2 \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_0^2 - \partial_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$.

Можно искать решение УКГФ в виде плоской волны $\phi = A\cdot e^{-ik_\alpha x^\alpha}$ где $A \neq A(x)$. Тогда

$$\partial_\mu\phi = -ik_\mu\phi \text{ , т.е.}$$

$$(-k_\mu k^\mu + m^2)\phi = 0$$

$$\Rightarrow \; -k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2 = 0 \quad \Rightarrow \; k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

— очень похоже на соотношение между энергией и импульсом релятивистской частицы:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \qquad (\text{в СГС} \quad E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4)$$

Поэтому параметр m обычно называют массой скалярного поля.

Более того, ВФ в квантовой механике для свободной частицы пропорциональна

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}\right) \quad \text{где} \quad E = E(\vec{p})$$

$\Rightarrow$ УКГФ можно рассматривать как релятивистское обобщение УШ – далее обсудим подробнее.

Общее решение – суперпозиция плоских волн:

$$\phi = \sum_{\bar{k}} A_{\bar{k}} e^{-ik_\alpha x^\alpha}\Big|_{k_0 = \pm\sqrt{\bar{k}^2 + m^2}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\alpha x^\alpha} \delta(k_\alpha^2 - m^2)\tilde{\phi}(k)$$

– более красивая запись решения УКГФ.

§ 2. Глобальная калибровочная инвариантность

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - V(\phi^*\phi)$$

инвариантен относительно преобразований

$$\phi \rightarrow \exp(-ie\alpha)\phi \equiv e^{-ie\alpha}\phi$$

$$\phi^* \rightarrow \phi^*\exp(ie\alpha) = e^{+ie\alpha}\phi^*$$

где $\alpha \neq \alpha(x)$ – параметр преобразований, а e – некоторая постоянная.

Преобразования, параметр которых не зависит от x называются <u>глобальными</u>, а с параметром, зависящим от x, – <u>локальными</u>.

Инвариантность проверяется так:

$$\phi^*\phi \to \phi^* \cancel{e^{ie\alpha}} \cancel{e^{-ie\alpha}} \phi = \phi^*\phi = \text{inv}$$

$$\partial_\mu \phi \to \partial_\mu (e^{-ie\alpha}\phi) = e^{-ie\alpha}\partial_\mu \phi$$

и $\Rightarrow$ $$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi \to \partial_\mu \phi^* \cancel{e^{ie\alpha}} \cdot \cancel{e^{-ie\alpha}} \partial^\mu \phi = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi = \text{inv}$$

Однако локальная калибровочная инвариантность отсутствует, поскольку если $\alpha = \alpha(x)$, то

$$\partial_\mu \phi \to \partial_\mu (e^{-ie\alpha}\phi) = e^{-ie\alpha}(\partial_\mu \phi - ie\partial_\mu \alpha \phi)$$

и $\Rightarrow$

$$|\partial_\mu \phi|^2 \to |\partial_\mu \phi - ie\partial_\mu \alpha \phi|^2 \neq \text{inv}.$$

§ 3. Скалярная электродинамика

Как можно получить теорию, инвариантную относительно локальных калибровочных преобразований?

Добавим в теорию поле, которое преобразуется по закону $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha$ (как и ранее в эл./д)

Затем построим ковариантную производную

$$\mathcal{D}_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi$$

Тогда при локальных калибровочных преобразованиях

$$\mathcal{D}_\mu \phi \longrightarrow \partial_\mu \phi' - ieA'_\mu \phi' =$$

[где $\phi' = \exp(-ie\alpha(x))\phi$

$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$]

$$= \partial_\mu [\exp(-ie\alpha)\phi] - ie(A_\mu - \partial_\mu \alpha)\cdot \exp(-ie\alpha)\phi =$$

$$= \exp(-ie\alpha)[\partial_\mu \phi - \cancel{ie\partial_\mu \alpha}\,\phi - ieA_\mu \phi + \cancel{ie\partial_\mu \alpha\,\phi}]$$

$$= \exp(-ie\alpha)\mathcal{D}_\mu \phi$$

– ковариантная производная преобразуется также, как и поле, на которое она действует.

Комплексно сопряжённая ковариантная производная

$$\mathcal{D}_\mu \phi^* \equiv (\mathcal{D}_\mu \phi)^* = \partial_\mu \phi^* + ieA_\mu \phi^* \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \partial_\mu(\exp(ie\alpha(x))\phi^*) + ie(A_\mu - \partial_\mu \alpha)\exp(ie\alpha(x))\phi^* =$$

$$= \exp(ie\alpha(x))[\partial_\mu \phi^* + ie\cancel{\partial_\mu \alpha}\,\phi^* + ieA_\mu \phi^* - ie\cancel{\partial_\mu \alpha}\,\phi^*]$$

$= \exp(ie\alpha(x))\mathcal{D}_\mu \phi^*$ – также преобразуется как и поле ϕ^*, на которое она действует.

Поэтому выражение

$$\mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

будет локально калибровочно инвариантно.
Однако поле A_μ входит в $\mathcal{L}_2$ без производных.
Поэтому добавим ещё

$$\mathcal{L}_1 \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

тогда

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

будет инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований

$$\begin{cases} \phi \to \exp(-ie\alpha(x))\phi \\ \phi^* \to \exp(+ie\alpha(x))\phi^* \\ A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$ где $\alpha = \alpha(x)$ – Re параметр.

– получилась т.н. скалярная электродинамика.
Построим для неё уравнения движения, учитывая, что $\varphi_i = (\phi, \phi^*, A_\nu)$.

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}$$

Начнём с ур-я для ϕ^*:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = \mathcal{D}^\mu \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -V'(\phi^*\phi)\cdot\phi + ie A^\mu \mathcal{D}_\mu \phi$$

Поэтому

$$0 = \partial_\mu \mathcal{D}^\mu \phi - ieA_\mu \mathcal{D}^\mu \phi + V'(\phi^*\phi)\cdot\phi$$

Эквивалентно это можно записать в более красивой форме

$$0 = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi + V'(\phi^*\phi)\,\phi$$

Уравнение для ϕ отличается на комплексное сопряжение:

$$0 = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi^* + V'(\phi^*\phi)\,\phi^*$$

Уравнение для A_ν:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}.$$

При этом $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$ – ранее вычислили

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}_\alpha \phi)} \frac{\partial(\mathcal{D}_\alpha \phi)}{\partial A_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}_\alpha \phi^*)} \frac{\partial(\mathcal{D}_\alpha \phi^*)}{\partial A_\nu} =$$

$$= \mathcal{D}^\alpha \phi^* \cdot (-ie\,\delta^\nu_\alpha)\phi + \mathcal{D}^\alpha \phi \cdot (+ie\,\delta^\nu_\alpha)\phi^* =$$

$$= -ie\mathcal{D}^\nu \phi^* \cdot \phi + ie\mathcal{D}^\nu \phi \cdot \phi^*$$

Поэтому

$$0 = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + ie\,\mathcal{D}^\nu \phi^* \cdot \phi - ie\mathcal{D}^\nu \phi \cdot \phi^*$$

Удобно это записать в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ie\,\mathcal{D}^\nu \phi^* \cdot \phi - ie\mathcal{D}^\nu \phi \cdot \phi^* \equiv j^\nu$$

– видно сходство с ур-ями Максвелла.

Т.о. система ур-й движения может быть записана в виде

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{где} \quad j^\nu \equiv ie\,\mathcal{D}^\nu \phi^* \cdot \phi - ie\,\mathcal{D}^\nu \phi \cdot \phi^* \\ \mathcal{D}^2_\mu \phi + V'(\phi^* \phi)\phi = 0 \\ \mathcal{D}^2_\mu \phi^* + V'(\phi^* \phi)\phi^* = 0 \end{cases}$$

При этом ранее мы видели, что ур-е непрерывности для тока j^ν необходимо для совместности ур-й Максвелла:

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu.$$

Будет ли это верно в рассматриваемой теории?

$$0 \overset{?}{=} \partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \left(ie\mathcal{D}^\nu\phi^* \cdot \phi - ie\mathcal{D}^\nu\phi \cdot \phi^* \right).$$

Имеем:

$$\partial_\nu \left(\mathcal{D}^\nu\phi^* \cdot \phi - \mathcal{D}^\nu\phi \cdot \phi^* \right) = \partial_\nu \mathcal{D}^\nu\phi^* \cdot \phi + \mathcal{D}^\nu\phi^* \partial_\nu \phi -$$

$$- \partial_\nu \mathcal{D}^\nu\phi \cdot \phi^* - \mathcal{D}^\nu\phi\, \partial_\nu\phi^* + \cancel{ieA_\nu \mathcal{D}^\nu\phi^* \cdot \phi} - \cancel{ieA_\nu \mathcal{D}^\nu\phi^* \cdot \phi}$$

$$+ \cancel{ieA_\nu \mathcal{D}^\nu\phi \cdot \phi^*} - \cancel{ieA_\nu \mathcal{D}^\nu\phi \cdot \phi^*} =$$

$$= \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu\phi^* \cdot \phi + \cancel{\mathcal{D}^\nu\phi^* \cdot \mathcal{D}_\nu\phi} - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu\phi \cdot \phi^* - \cancel{\mathcal{D}^\nu\phi\, \mathcal{D}_\nu\phi^*} =$$

(Используем ур-я движения для скалярного поля)

$$= - \cancel{V'(\phi^*\phi)\, \phi^*\phi} + \cancel{V'(\phi^*\phi)}\, \phi\phi^* = 0$$

$\Rightarrow$ ур-е непрерывности выполняется как следствие ур-й движения для скалярного поля.

§4. Низкоэнергетический предел ур-я Клейна-Гордона-Фока

Рассмотрим теорию с

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu\phi^* \mathcal{D}^\mu\phi - m^2\phi^*\phi$$

т.е. $V(\phi^*\phi) = m^2\phi^*\phi$.

Тогда ур-е движения для скалярного поля будет записано в виде

$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi + m^2\phi = 0$ — ур-е КГФ с эл./м. полем.

Попробуем понять, как устроен его низкоэнергетический предел:

$\phi = \phi(t, \bar{r})$ — аналог ВФ в квантовой механике.

$\Longrightarrow \phi \sim \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$ где $E = \underbrace{mc^2}_{\text{энергия покоя}} + \underbrace{\Delta E}_{\text{энергия в нерелятив. квантовой механике.}}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t} = -iE\phi \approx -im\phi$$

Но в квантовой механике $\psi \sim \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta E t\right)$

Поэтому можно попробовать отождествить

$\phi \equiv e^{-imt}\psi$ где ψ — ВФ в квантовой механике.

Тогда

$$\bar{\nabla}\phi = e^{-imt}\,\bar{\nabla}\psi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = e^{-imt}\Big(-im\psi + \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial t}}_{\sim \Delta E\,\psi}\Big)$$

причём $\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right| \ll m|\psi|$ если $|\Delta E| \ll m$

$\Longleftrightarrow v \ll c$.

Тогда

$$0 = \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu\phi + m^2\phi = \mathcal{D}_0^2\phi - \mathcal{D}_i^2\phi + m^2\phi =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\varphi\right)^2\phi - (\bar{\nabla} + ie\bar{A})^2\phi + m^2\phi =$$

$$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$

$$= \exp(-imt)\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - im - ie\varphi\right)^2\psi - (\bar{\nabla} + ie\bar{A})^2\psi + \right.$$

$$\left. + m^2\psi \right\}$$

$$\Longrightarrow 0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - im - ie\varphi\right)^2\psi - (\bar{\nabla}+ie\bar{A})^2\psi + m^2\psi =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}} - \cancel{m^2\psi} - \cancel{e^2\varphi^2\psi} - 2im\frac{\partial\psi}{\partial t} - 2me\varphi\psi -$$

$$- \cancel{ie\varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}} - \cancel{ie\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\psi)} - (\bar{\nabla} + ie\bar{A})^2\psi \cancel{+m^2\psi}$$

Пренебрегаем т.к. поля всегда малы по сравнению с m. Поэтому

$$2im\frac{\partial\psi}{\partial t} \approx -2me\varphi\psi - (\bar{\nabla}+ie\bar{A})^2\psi$$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} \approx -\frac{1}{2m}(\bar{\nabla}+ie\bar{A})^2\psi - e\varphi\psi$$

$$\Longrightarrow q = -e$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{q}{c}\bar{A}\right)^2 + q\varphi \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\bar{\nabla} + \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2 - e\varphi \rightleftharpoons -\frac{1}{2m}(\bar{\nabla}+ie\bar{A})^2 - e\varphi$$

– получилось уравнение Шредингера.

Глава IV. Массивное векторное поле и спонтанное нарушение симметрии.

§ 1. Лагранжиан массивного векторного поля.

В теориях ЯМ есть много векторных полей, но экспериментально так много их нет. Дело в том, что они приобретают массу.

Массивное векторное поле описывается ф-ей Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{m^2}{2}A_\mu^2 \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$$

Уравнения движения: $\left(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)$

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu$$

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu .$$

Применим к этому ур-ю оператор ∂_ν:

$$0 = \underbrace{\partial_\nu \cancel{\partial_\mu} F^{\mu\nu}}_{0} + m^2 \partial_\nu A^\nu$$

$\Rightarrow$ при $m \neq 0$ $\partial_\nu A^\nu = 0$ – следствие ур-й движения, а не калибровка.

Подставим $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ в ур-е движения:

$$0 = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = \partial_\mu^2 A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\cancel{\partial_\mu A^\mu}}_{0} + m^2 A^\nu$$

$\Longrightarrow$

$$0 = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) A^\nu$$

— для каждой компоненты векторного поля получилось уравнение Клейна-Гордона-Фока.

Как и в случае скалярного поля, его решение можно записать в виде суперпозиции плоских волн

$$A^\nu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \delta(k_\alpha^2 - m^2)\, \tilde{A}^\nu(k)\, e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

где
$$\begin{cases} k_\alpha^2 - m^2 = 0 \\ k_\nu \tilde{A}^\nu(k) = 0 \end{cases}$$

Можно выбрать СО, в которой $k^\alpha = (m, 0, 0, 0)$ — где массивная частица покоится. Тогда

$$m\tilde{A}^0 = 0 \implies \tilde{A}^0 = 0, \text{ а } \tilde{A}^i \text{ - произвольны}$$

Поэтому говорят, что массивное векторное поле имеет 3 степени свободы.

(Но в смысле механики число степеней свободы бесконечно)

Но нет калибровочной инвариантности

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha, \quad \text{т.к.} \quad A_\mu^2 \neq (A_\mu - \partial_\mu \alpha)^2$$

§2. Сравнение с безмассовым векторным полем

Что будет в случае $m=0$?

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \,, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Важное отличие — $\exists$ калибровочной инвариантности

$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha$.

Ур-я движения $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$.

Зафиксируем калибровку условием Лоренца

$\partial_\mu A^\mu = 0$. Тогда

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu^2 A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\cancel{(\partial_\mu A^\mu)}}_{0}$$

$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu^2 A^\nu$ — как и ранее при $m=0$, но теперь $\partial_\mu A^\mu = 0$ — калибровка, а не следствие ур-й движения.

Решение этого ур-я

$$A^\nu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, \delta(k_\alpha^2) \, \tilde{A}^\nu(k) \, e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

где $k_\alpha^2 = 0$ и $k_\nu \tilde{A}^\nu(k) = 0$.

Но теперь уже нельзя выбрать СО, где частица покоится, теперь $k^\mu = (E, 0, 0, E)$

(импульс частицы направлен по оси z)

тогда $k_\nu \tilde{A}^\nu(k) = 0 = E\tilde{A}^0(k) - E\tilde{A}^3(k)$

$\Rightarrow \tilde{A}^0(k) = \tilde{A}^3(k)$.

Важно, что в калибровке Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$ имеется остаточная инвариантность

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha \quad \text{где} \quad \partial_\mu^2 \alpha = 0$$

Действительно, при таких преобразованиях

$$0 = \partial_\mu A^\mu \longrightarrow \partial_\mu (A^\mu - \partial^\mu \alpha) = \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{0} - \underbrace{\partial_\mu^2 \alpha}_{0} = 0$$

Поэтому

$$\alpha = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta^4(k_\alpha^2) \cdot \tilde{\alpha}(k)\, e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

а остаточные преобразования дадут

$$A^\nu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2) \tilde{A}^\nu(k)\, e^{-ik_\alpha x^\alpha} \longrightarrow A^\nu - \partial^\nu \alpha =$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2) \left[\tilde{A}^\nu(k) + ik^\nu \tilde{\alpha}(k) \right] e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^\nu(k) \rightarrow \tilde{A}^\nu(k) + ik^\nu \tilde{\alpha}(k)$$

в СО $k^\mu = (E, 0, 0, E)$

т.е.
$$\begin{cases} \tilde{A}^0(k) \rightarrow \tilde{A}^0(k) + iE\tilde{\alpha}(k) \\ \tilde{A}^1(k) \rightarrow \tilde{A}^1(k)\ ; \quad \tilde{A}^2(k) \rightarrow \tilde{A}^2(k) \\ \tilde{A}^3(k) \rightarrow \tilde{A}^3(k) + iE\tilde{\alpha}(k) \end{cases}$$

Выберем $\tilde{\alpha}(k)$ т.ч.

$$\tilde{A}^0(k)' \equiv \tilde{A}^0(k) + iE\tilde{\alpha}(k) = 0$$

тогда т.к. $\tilde{A}^0(k) = \tilde{A}^3(k)$, то

$$\tilde{A}^3(k)' = \tilde{A}^3(k) + iE\tilde{\alpha}(k) = \tilde{A}^0(k) + iE\tilde{\alpha}(k) = 0$$

— одновременно зануляются временная и продольная компоненты потенциала.

Но поперечные компоненты $\tilde{A}^1(k)$ и $\tilde{A}^2(k)$ остаются произвольными. Поэтому говорят, что безмассовое векторное поле имеет 2 степени свободы.

Заметим, что т.к. $\alpha(x) \in Re$, то

$$\alpha = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2)\, \tilde{\alpha}(k)\, e^{-ik_\alpha x^\alpha} = \alpha^* = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2)\, \tilde{\alpha}^*(k)\, e^{+ik_\alpha x^\alpha}$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k_\alpha^2)\, \tilde{\alpha}^*(-k)\, e^{-ik_\alpha x^\alpha}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}(k) = \tilde{\alpha}^*(-k) \quad \text{(уже нет условия Re)}$$

Аналогичным образом $\tilde{A}_\mu(+k) = \tilde{A}^*_\mu(-k)$.

§ 3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией (Абелев случай)

Как получить массивное векторное поле, не нарушая калибровочной инвариантности?

Это делается с помощью механизма СНС, который проще всего понять в случае когда нарушается глобальная калибровочная симметрия.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

В квантовой теории поля будет показано, что хорошие (перенормируемые) теории получаются только в случае, когда потенциал имеет не более чем 4-ю степень по полям.

$$E = \int d^3x \, T^{00} \quad , \text{ где}$$

$$T^{\mu}_{\cdot \nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\nu \phi^* - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} =$$

$$= \partial^\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \partial^\mu \phi \, \partial_\nu \phi^* - \delta^\mu_\nu \left[\partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - V(\phi^* \phi) \right]$$

$$\Rightarrow T^{00} = \partial^0 \phi^* \partial^0 \phi + \cancel{\partial^0 \phi \, \partial^0 \phi^*} - \Big[\cancel{\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi} - \partial_i \phi^* \partial_i \phi$$

$$- V(\phi^* \phi) \Big] = \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_i \phi^* \partial_i \phi + V(\phi^* \phi)$$

$$\Rightarrow \quad E = \int d^3x \left\{ \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_i \phi^* \partial_i \phi + V(\phi^* \phi) \right\}$$

Чтобы E была бы положительно определена, будем считать, что $V(\phi^* \phi) \geq 0$. Также для простоты положим, что $E_{min} = 0$.

Требуя, чтобы $V(\phi^*\phi)$ имел бы не более, чем 4-ю степень по полям, получим, что имеются 2 принципиально различные возможности:

а) $V(\phi^*\phi) = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$, $m \in Re$
$\lambda \geqslant 0$.

б) $V(\phi^*\phi) = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2 = \lambda(\phi^*\phi)^2 - 2\lambda v^2(\phi^*\phi) + \lambda v^4$

где $\lambda > 0$ $[v] = m$

Отличие - в знаке перед квадратичными слагаемыми и наличии несущественной постоянной.

Выделим из ϕ Re и Im части:

$$\phi \equiv P + iS \quad , \text{ т.ч. } \phi^*\phi = P^2 + S^2$$

Тогда если $\phi \to \exp(-ie\alpha)\phi$, $\alpha \neq \alpha(x)$, то

$$P + iS \to (\cos(e\alpha) - i\sin(e\alpha))(P + iS) =$$

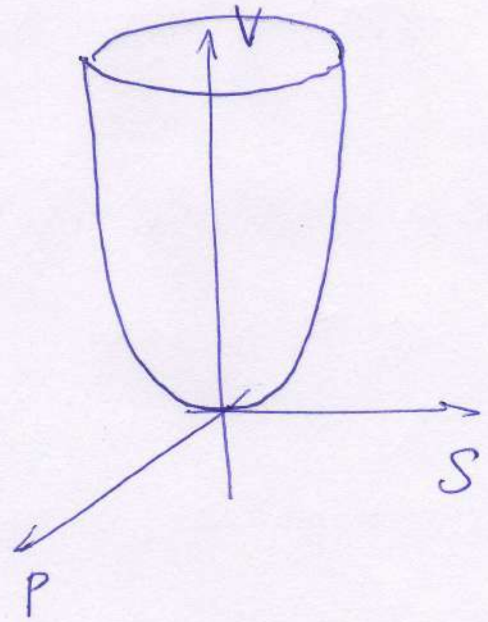
$$= [\cos(e\alpha)P + \sin(e\alpha)S] + i[-\sin(e\alpha)P + \cos(e\alpha)S]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P \to \cos(e\alpha)P + \sin(e\alpha)S \\ S \to -\sin(e\alpha)P + \cos(e\alpha)S \end{cases}$$

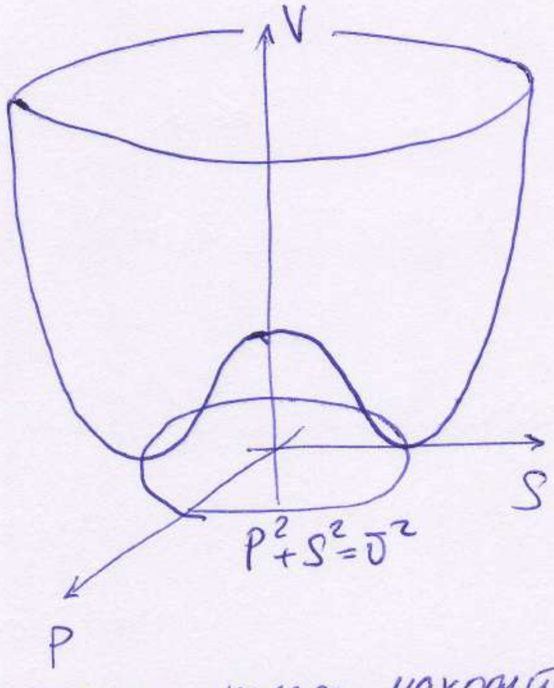
- калибровочные преобразования соответствуют вращениям в плоскости с координатами P и S.

В силу глобальной калибровочной инвариантности
потенциал будет поверхностью вращения

а) $V = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$



б) $V = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2$



В класс. теории поля система хочет находится в состоянии с наименьшей энергией, которое будем называть вакуумом.

$$E = \int d^3x \left\{ |\partial_0\phi|^2 + |\partial_i\phi|^2 + V(\phi^*\phi) \right\}$$

$\Rightarrow E = E_{min} = 0$ если $\phi \neq \phi(t,\bar{r})$ и

$$V(\phi^*\phi) \to \min$$

Поэтому вакуум ϕ_0 не зависит от t и $\bar{r}$.

В случае а) $\phi_0 = 0$ – очевидно

В случае б) ϕ_0 – $\forall$ точка на ок-сти $P^2+S^2=v^2$ – сама система её выбирает.

Предположим теперь, что отклонения полей от вакуума малы — похоже на задачу о малых колебаниях в механике. Тогда

a) $\phi_0 = 0 \Rightarrow \phi = \phi - \phi_0$ — мало

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \approx$$

$$\approx \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

— ур-я движения линейны и получается 1 массивное комплексное поле ϕ массы m.

Эквивалентно, если $\phi = P + iS$, то

$$\mathcal{L}^{(2)} = \partial_\mu P \partial^\mu P + \partial_\mu S \partial^\mu S - m^2 (P^2 + S^2)$$

— 2 Re скалярных поля.

Спектр частиц строится по квадратичной части $\mathcal{L}$, а высшие степени ~ взаимодействию.

б) Выберем $\phi_0 = \sigma \in Re$ (возможны и другие варианты)

Тогда $\phi = \sigma + P_1 + iS_1$, где P_1 и S_1 малы.

Тогда

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \lambda (\phi^* \phi - \sigma^2)^2 = (\partial_\mu P_1)^2 + (\partial_\mu S_1)^2 -$$

$$- \lambda ((P_1 + \sigma)^2 + S_1^2 - \sigma^2)^2 =$$

$$= (\partial_\mu P_1)^2 + (\partial_\mu S_1)^2 - \lambda\left(P_1^2 + 2vP_1 + \cancel{v^2} + S_1^2 - \cancel{v^2}\right)^2 \approx$$

$$\approx (\partial_\mu P_1)^2 + (\partial_\mu S_1)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$$

$\Rightarrow$ в теории есть массивное Re скалярное поле P_1 с $m_P = 2v\sqrt{\lambda}$

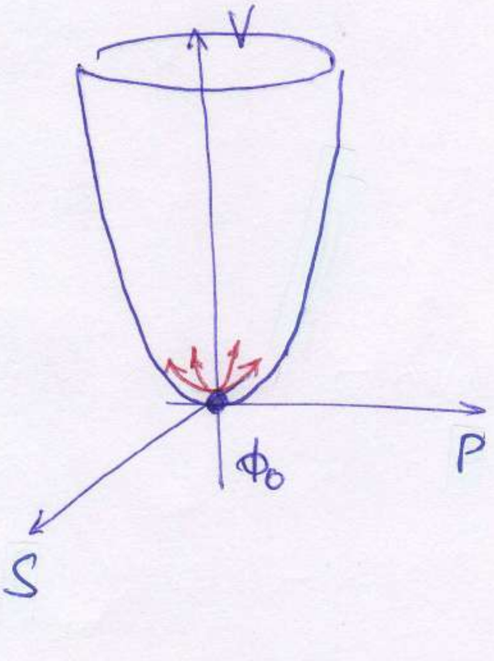
и безмассовое Re скалярное поле S_1 с $m_S = 0$

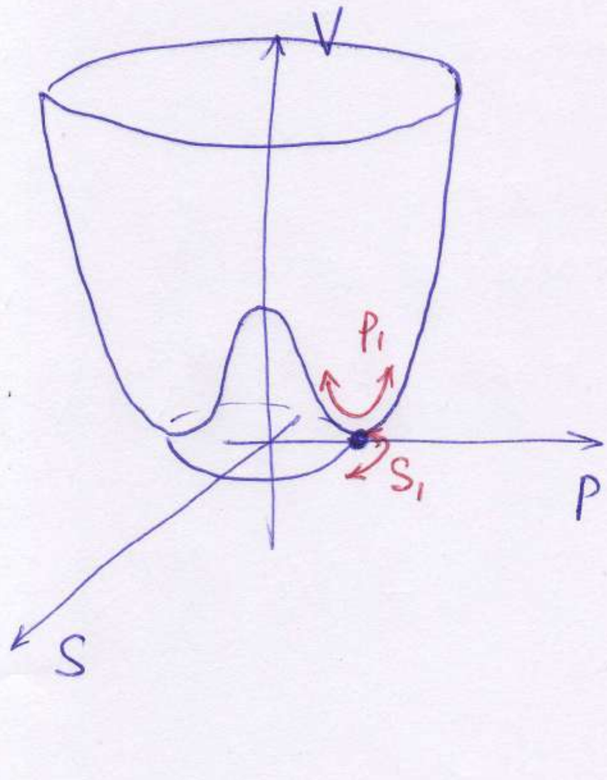
Поле S_1 называется голдстоуновским бозоном. Оно возникает благодаря СНС — теория калибровочно инвариантна, а вакуум — нет.

$$\Phi_0 = v \longrightarrow \exp(-ie\alpha)\, v \neq v$$

(В отличие от случая а), когда

$$\Phi_0 = 0 \rightarrow \exp(-ie\alpha)\cdot 0 = 0\,)$$





§4. Спектр частиц в теориях с локальной калибровочной симметрией (Абелев случай)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^*\phi)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi \; ; \quad \mathcal{D}_\mu \phi^* = \partial_\mu \phi^* + ie A_\mu \phi^*$$

инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований

$$\begin{cases} \phi \to \exp(-ie\alpha)\phi \; ; \quad \phi^* \to \exp(ie\alpha)\phi^* \\ A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha \quad \text{где } \alpha = \alpha(x). \end{cases}$$

При этом, как и ранее, возможны 2 случая:

а) $V = m^2 \phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \qquad \lambda \geq 0$

б) $V = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2 \qquad \lambda > 0.$

Здесь энергия строится по симметризованному тЭИ:

$$T^\mu_{\cdot\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \partial_\nu \phi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial_\nu A_\alpha - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

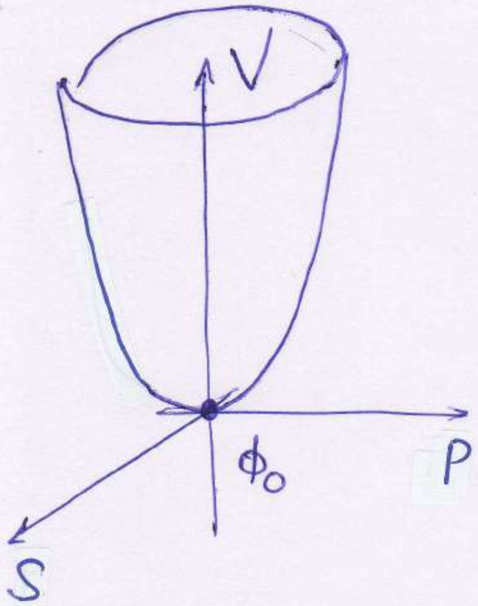
$$\boxed{\begin{aligned} \Theta^\mu_{\cdot\nu} = T^\mu_{\cdot\nu} + \partial_\alpha(A_\nu F^{\mu\alpha}) \overset{\mathcal{D}/3}{=} \mathcal{D}^\mu \phi \mathcal{D}_\nu \phi^* + \mathcal{D}^\mu \phi^* \mathcal{D}_\nu \phi \\ - F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \delta^\mu_\nu \cdot \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \delta^\mu_\nu \cdot \mathcal{D}_\alpha \phi^* \mathcal{D}^\alpha \phi + \delta^\mu_\nu V(\phi^*\phi) \end{aligned}}$$

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{H}^2 + \mathcal{D}_0\phi^*\mathcal{D}_0\phi + \mathcal{D}_i\phi^*\mathcal{D}_i\phi + \right.$$

$$\left. + V(\phi^*\phi) \right\} \longrightarrow \min$$

Поэтому в вакууме можно взять $\phi_0 = const$, т.ч. $V(\phi_0^*\phi_0) \to \min$ и $A_{\mu 0} = 0$.

a) $V = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$



$\phi_0 = 0$; $A_{\mu 0} = 0$

В этом случае

$\phi = \phi - \phi_0$ и

$A_\mu = A_\mu - A_{\mu 0}$

являются малыми величинами.

$\Longrightarrow$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu\phi^*\mathcal{D}_\mu\phi - V(\phi^*\phi) \approx$$

$$\approx -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi$$

– в спектре частиц теории есть

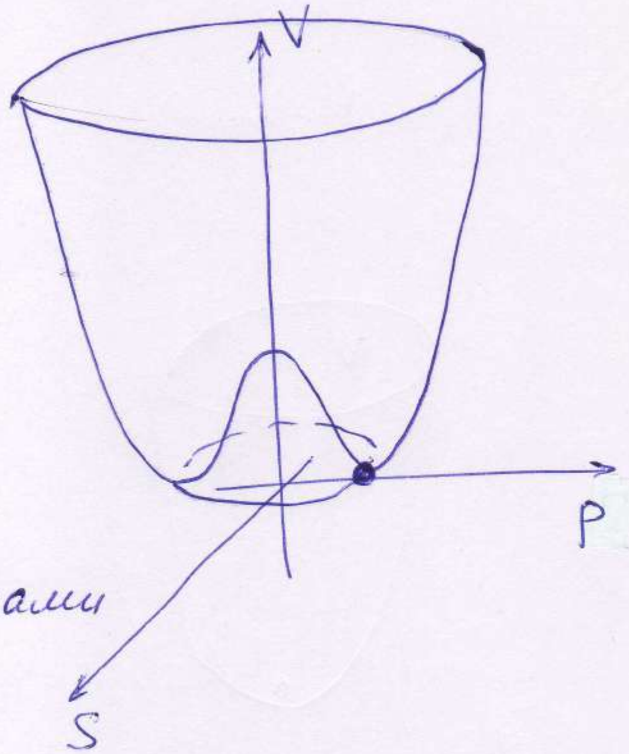
1) Безмассовое векторное поле A_μ

2) Массивное комплексное скалярное поле массы m.

$\left(\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi \approx \partial_\mu\phi\right.$ в рассматриваемом приближении)

Число ст. свободы $2+2=4$.

б) $V(\phi^*\phi)=\lambda(\phi^*\phi-\upsilon^2)^2$



Здесь можно выбрать вакуумное состояние в виде

$\phi_0=\upsilon\in Re$

$A_{\mu 0}=0$

Тогда малыми величинами будут $\varphi\equiv\phi-\phi_0=\phi-\upsilon$

и $A_\mu=A_\mu-A_{\mu 0}$.

Найдём теперь часть функции Лагранжа, квадратичную по этим полям.

$$\mathcal{D}_\mu\Phi=\partial_\mu\phi-ieA_\mu\phi\approx\partial_\mu\phi-ieA_\mu\upsilon=$$

$$=\partial_\mu P_1+i\partial_\mu S_1-ieA_\mu\upsilon$$

$$\Longrightarrow|\mathcal{D}_\mu\Phi|^2\approx(\partial_\mu P_1)^2+(\partial_\mu S_1-eA_\mu\upsilon)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\phi&\equiv P+iS\\ \varphi&\equiv P_1+iS_1\\ P_1&\equiv P-\upsilon\\ S_1&\equiv S\end{aligned}}$$

Кроме того,

$$\lambda(\phi^*\phi-\upsilon^2)^2=\lambda\left((P_1+\upsilon)^2+S_1^2-\upsilon^2\right)^2=$$

$$=\lambda\left(P_1^2+2\upsilon P_1+S_1^2\right)^2\approx4\lambda\upsilon^2P_1^2$$

Поэтому функция Лагранжа в квадратичном приближении запишется в виде

$$\mathcal{L} \simeq -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu P_1)^2 + (\partial_\mu S_1 - eA_\mu v)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$$

– нельзя сказать какой будет спектр частиц, т.к. присутствует недиагональное слагаемое. Чтобы от него избавиться введём поле

$$B_\mu \equiv A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu S_1.$$

Тогда

$$\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \partial_\mu\left(A_\nu - \cancel{\frac{1}{ev}\partial_\nu S_1}\right) - \partial_\nu\left(A_\mu - \cancel{\frac{1}{ev}\partial_\mu S_1}\right) =$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

и лагранжиан в квадратичном приближении примет вид

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + e^2 v^2 B_\mu^2 + (\partial_\mu P_1)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$$

$\Rightarrow$ в спектре частиц будут присутствовать

1. Массивное векторное поле B_μ, $m_B = \sqrt{2}ev$

(т.к. $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{m^2}{2}A_\mu^2$)

2. Массивное Re скалярное поле P_1, $m_P = 2v\sqrt{\lambda}$

– число ст. свободы будет $3+1=4$ – такое же, как и ранее.

При этом теория калибровочно инвариантна!)

Голдстоуновский бозон S_1 исчез из спектра частиц — его "съело" векторное поле и приобрело в результате массу.

Отсутствие в спектре поле S_1 можно объяснить с помощью специального выбора калибровки:

Рассматриваемая теория инвариантна относительно преобразований вида

$$\begin{cases} \Phi \to \exp(-ie\alpha)\Phi \\ A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha \end{cases}$$

Если $\Phi = v + P_1 + iS_1$, где P_1 и S_1 - малы, то

$$v + P_1 + iS_1 \to \exp(-ie\alpha)(v + P_1 + iS_1) \approx (1 - ie\alpha)\cdot$$

$$\cdot(v + P_1 + iS_1) \approx v + P_1 + \underbrace{iS_1 - ie\alpha v}_{\mathrm{Im}}$$

$\Rightarrow$ можно подобрать параметр α т.о., чтобы

$$S_1' \equiv S_1 - e\alpha v = 0$$

Другими словами, $\exists$ калибровка, в которой $S_1 = 0$. (т.н. унитарная калибровка)

В унитарной калибровке голдстоуновский бозон отсутствует и $\Rightarrow$ его нет в спектре частиц.

В унитарной калибровке спектр частиц очень легко исследовать:

$\phi = v + P_1 \quad (S_1 = 0)$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu P_1 - ieA_\mu(v+P_1) \approx \partial_\mu P_1 - ieA_\mu v$$

Поэтому

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu P_1)^2 + e^2 v^2 A_\mu^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$$

– здесь уже не нужно вводить новое поле B_μ – сразу видно наличие массивного векторного поля A_μ и Re скалярного поля P_1.

Итог: массивные векторные поля можно получить без нарушения калибровочной инвариантности с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии.

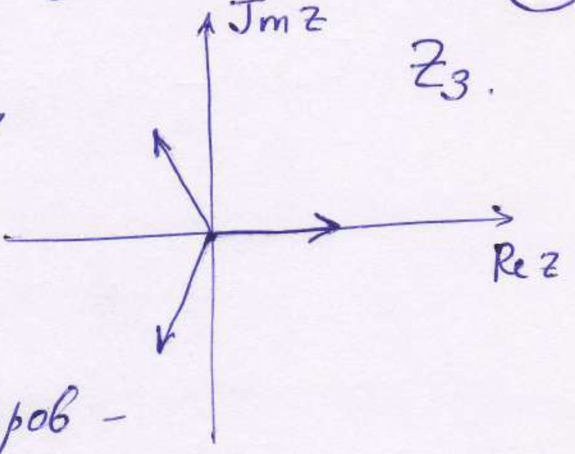
Глава V. Некоторые сведения о группах и алгебрах Ли

§ 1. Группы Ли.

Группа – множество, на котором задана операция умножения, т.ч.

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. $\exists\, 1 : \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
3. $\forall a \;\exists\, a^{-1} : \; a \cdot a^{-1} = a^{-1} a = 1$.

Пример $Z_n = \{ e^{i\cdot 2\pi k/n}, k \in Z \}$



Группа Ли - группа, элементы которой гладко зависят от некоторого числа параметров.

Число независимых параметров - размерность группы.

Примеры: 1) $U(1)$: $\{ z = e^{i\alpha}, \alpha \in Re \}$ - ок-сть S^1

2) Матричные группы - операция умножения - умножение матриц.

а) $GL(n,R)$ или $GL(n,C)$: $\det \omega \neq 0$ (чтобы $\exists$ обратный элемент)

$\dim GL(n,R) = n^2$

б) $SL(n,R)$ или $SL(n,C)$: $\det \omega = 1$

$\dim SL(n,R) = n^2 - 1$.

в) $O(n,R)$, $O(n,C)$: $\omega^T \omega = 1 \Rightarrow \det \omega = \pm 1$.

г) $SO(n,R)$, $SO(n,C)$: $\omega^T \omega = 1$; $\det \omega = 1$.

д) $U(n)$: $\omega^+ \omega = 1$.

е) $SU(n)$: $\omega^+ \omega = 1$; $\det \omega = 1$

ж) $O(p,q)$: $\omega^T \eta \omega = \eta$ где $\eta = \left(\begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{matrix}$

$O(1,3)$ - группа Лоренца.

Компактные группы Ли: групповое многообразие компактно, т.е. является замкнутым и ограниченным множеством.

Примеры Компактные: $U(n)$, $O(n,R)$, $SO(n,R)$, $SU(n)$.

Некомпактные: $SL(n,R)$, $GL(n,R)$, $O(p,q)$

Это легко понять сравнением $SL(2,R)$ и $SU(2)$:

$SL(2,R)$:
$$\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{где } ad-bc=1. \quad a,b,c,d \in Re$$

Эквивалентно,
$$\omega = \begin{pmatrix} a_4+a_3 & a_1+a_2 \\ +a_1-a_2 & a_4-a_3 \end{pmatrix} \quad \text{где } a_4^2-a_3^2-a_1^2+a_2^2=1$$

– очевидно, что $a_1 \dots a_4$ могут быть сколь угодно велики. $\Rightarrow SL(2,R)$ некомпактна.

$SU(2)$: $\omega^+\omega = 1$; $\det\omega = 1$ $\qquad \omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \omega^{-1} = \omega^+ \Leftrightarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

1

$$\Rightarrow \begin{matrix} a^* = d; \\ b^* = -c \end{matrix} \quad \Rightarrow \omega = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \; |a|^2+|b|^2=1$$

Эквивалентно

$$\omega = \begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & ia_1 + a_2 \\ ia_1 - a_2 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix} = a_4 \cdot 1_2 + i\vec{\sigma}\vec{a}$$

где $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$ – сфера S^3.

– видно, что $a_1 \ldots a_4$ не могут быть сколь угодно большими – очевидна компактность.

Компактные группы Ли всегда можно представить как некоторые подгруппы $U(n)$ при достаточно большом $n \Rightarrow$ для них $\omega^+ = \omega^{-1}$!

§ 2. Алгебры Ли и их связь с группами Ли

Алгебра Ли – линейное пространство, на котором задана операция $[\,,\,]$ т.ч.

1) $[a, b] = -[b, a]$

2) $\left.\begin{array}{l}[a, b+c] = [a, b] + [a, c] \\ [\lambda a, b] = \lambda [a, b] \text{ где } \lambda \text{ – число}\end{array}\right\}$ билинейность

3) $[a[b, c]] + [b[c, a]] + [c[a, b]] = 0$ – тождество Якоби.

Если $\forall\, a, b \quad [a, b] = 0$, то алгебра Ли называется абелевой (или коммутативной)

Матричные алгебры Ли состоят из квадратных $n \times n$ матриц, для которых

$$[a, b] \equiv ab - ba.$$

В частности, тогда

$$[a[b,c]] + [b,[c,a]] + [c[a,b]] =$$

$$= a(bc - cb) - (bc - cb)a + b(ca - ac) - (ca - ac)b$$

$$+ c(ab - ba) - (ab - ba)c = 0$$

Любая конечномерная алгебра Ли может считаться матричной.

Группы и алгебры Ли связаны с помощью т.н. экспоненциального отображения:

В окрестности 1 группы G справедливо равенство

$\boxed{\omega = e^{\alpha}}$ где $\omega \in G$, а α − элемент алгебры Ли.

Почему это так?

Если $\omega_1, \omega_2 \in G$, то $\omega_1 \omega_2 \in G$

Пусть $\omega = e^{\alpha}$ и $\alpha \in$ некоторому множеству A.

Тогда

$$\omega_1 \omega_2 = e^{\alpha_1} e^{\alpha_2} \approx \left(1 + \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \dots\right)\left(1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \dots\right)$$

$$= \left(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \dots\right) =$$

$$= 1 + (\alpha_1+\alpha_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)^2 + \frac{1}{2}[\alpha_1,\alpha_2] + \dots$$

т.к. $(\alpha_1+\alpha_2)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2^2$

$\Rightarrow$ в линейном порядке если $\alpha_1 \in A$ и $\alpha_2 \in A$, то $\alpha_1+\alpha_2 \in A \Rightarrow A$ наверное линейное пр-во

во втором порядке:

$$\omega_1\omega_2 = \exp\left(\alpha_1+\alpha_2+\frac{1}{2}[\alpha_1,\alpha_2]+\dots\right) \in G$$

и $\Rightarrow [\alpha_1,\alpha_2] \in A \Rightarrow A$ наверное алгебра Ли.

Построим теперь алгебры Ли, которые соответствуют ранее перечисленным группам Ли:

а) $GL(n,R)$; $GL(n,C)$ $\sim gl(n,R)$; $gl(n,C)$

- состоят из произвольных $n\times n$ матриц

При этом в силу формулы $(\dim = n^2)$

$$\operatorname{tr}\ln\omega = \ln\det\omega \qquad (\omega = e^{\alpha})$$

$$\det\omega = \exp(\operatorname{tr}\ln\alpha) \neq 0.$$

Действительно, пусть ω можно диагонализовать преобразованием $\omega \to A\omega A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{pmatrix}$

(для этого все СЗ должны быть различны)

Тогда $\det\omega = \det(A\omega A^{-1}) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$

$\Rightarrow \ln \det \omega = \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ldots + \ln \lambda_n$

С другой стороны,

$$\mathrm{tr} \ln \omega = \mathrm{tr} \ln (1 + \omega - 1) = \mathrm{tr} \left[(\omega - 1) - \frac{1}{2}(\omega-1)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}(\omega-1)^3 + \ldots \right] = \mathrm{tr} \left[A(\omega-1)A^{-1} - \frac{1}{2}\left(A(\omega-1)A^{-1}\right)^2 + \ldots \right]$$

$$= \mathrm{tr} \left[(A\omega A^{-1} - 1) - \frac{1}{2}(A\omega A^{-1} - 1)^2 + \ldots \right] = \mathrm{tr} \ln (A\omega A^{-1}) =$$

$$= \mathrm{tr} \begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & & & \\ & \ln\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ln\lambda_n \end{pmatrix} = \ln\lambda_1 + \ln\lambda_2 + \ldots + \ln\lambda_n \Rightarrow$$

$$\ln \det \omega = \mathrm{tr} \ln \omega$$

Если $\exists$ одинаковые СЗ, то немного меняем матрицу и пользуемся непрерывностью.

б) $SL(n, R)$; $SL(n, C)$ $\sim$ $\det \omega = 1$ $\sim$ $sl(n,R)$; $sl(n,C)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \ln \det \omega = \mathrm{tr}\, \alpha \qquad (\dim = n^2 - 1)$$

– соотв. алгебры Ли состоят из бесследовых матриц

$$\mathrm{tr}\,[a, b] = \mathrm{tr}(ab - ba) = 0 \quad \text{– верно}$$

в) $O(n,R)$; $O(n,C)$ $\quad \omega^T \omega = 1$ $\sim$ $o(n,R)$; $o(n,C)$

$$\omega = e^{\alpha} \Rightarrow 1 = e^{\alpha^T} e^{\alpha} \Rightarrow \alpha^T = -\alpha$$

При этом автоматически $\mathrm{tr}\,\alpha = 0$

$\dim = \dfrac{n(n-1)}{2}$ – число независимых компонент антисимм. матрицы.

г) $SO(n,R)$; $SO(n,C)$ $\sim$ $so(n,R)$; $so(n,C)$

– такая же алгебра Ли, т.к. $tr\,\alpha = 0$ получается из $\alpha^T = -\alpha$ автоматически

$\Rightarrow$ 2 разные группы Ли могут иметь одну и ту же алгебру Ли.

$$dim = \frac{n(n-1)}{2}$$

д) $U(n)$: $\omega^+\omega = 1$ $\omega = e^{\alpha}$

$\Rightarrow$ $u(n)$ состоит из антиэрмитовых матриц

$\alpha^+ = -\alpha$

Число параметров: $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 = dim$

е) $SU(n) \sim su(n)$ т.к. $\alpha^+ = -\alpha$; $tr\,\alpha = 0$

$\Rightarrow dim = n^2 - 1$.

ж) $O(p,q)$ $\omega^T\eta\omega = \eta$ $\omega = e^{\alpha} \simeq 1 + \alpha$

$\Rightarrow \alpha^T\eta + \eta\alpha = 0 \Leftrightarrow (\alpha^T)^{\mu}{}_{\alpha}\eta^{\alpha\nu} + \eta^{\mu\alpha}\alpha_{\alpha}{}^{\nu} = 0$

$\alpha^{\nu\mu} + \alpha^{\mu\nu} = 0$ $\Rightarrow$ $\eta\alpha$ – антисимм. матрица

и $\Rightarrow dim\,O(p,q) = \frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$.

Для группы Лоренца $p+q = 4$ и $\Rightarrow dim = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

§3. Генераторы и структурные константы

Алгебра Ли $\mathcal{A}$ является линейным пространством и в ней можно выбрать базис $i t^A$, т.ч. если $\alpha \in \mathcal{A}$, то
$$\alpha = i\alpha^A t^A$$

Мнимая единица введена для удобства обозначении в теории поля, где используются компактные алгебры Ли, для которых $\alpha = -\alpha^+$

Тогда
$$(i\alpha^A t^A)^+ = -i\alpha^A t^A \quad \text{и} \Rightarrow (\text{т.к. } \alpha^A \in Re)$$
$$(t^A)^+ = t^A$$

т.о. в данных обозначениях генераторы компактных алгебр Ли будут эрмитовыми.

Известно, что для компактных алгебр Ли величина $tr(t^A t^B)$ – положительно определённая матрица и выбором генераторов можно добиться, чтобы
$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB} \qquad (\text{Зачем } 1/2 \text{ – см. далее})$$

Для некомпактных так не будет.

<u>Пример</u> $SU(2)$ и $SL(2,R)$

$su(2)$ состоит из матриц вида $\alpha^+ = -\alpha$
$$tr\,\alpha = 0$$

Поэтому $(t^A)^+ = t^A$ и $\operatorname{tr} t^A = 0$

причём $A = 1, 2, 3$.

$\Rightarrow$ можно взять $t^A = \frac{1}{2}\sigma^A$

$$\operatorname{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{4}\operatorname{tr}(\sigma^A \sigma^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$$ – для этого и нужна $1/2$.

Сравним с $sl(2,R)$ – состоит из Re матриц с нулевым следом:

t^A – чисто мнимые и бесследовые. Поэтому

$$t^1 = \frac{i}{2}\sigma^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad t^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$t^3 = \frac{i}{2}\sigma^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ – знаконеопределённая

Поскольку если $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, то $[\alpha, \beta] \in \mathcal{A}$ и $\Rightarrow$

$$[i\alpha^A t^A, i\beta^B t^B] = i\gamma^C t^C$$

Поэтому $[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C$, где f^{ABC} – т.н. структурные константы группы (алгебры) Ли.

Тогда

$$[\alpha, \beta] = [i\alpha^A t^A, i\beta^B t^B] = -i\alpha^A \beta^B f^{ABC} t^C \in \mathcal{A}$$

При этом очевидно, что $f^{ABC} = -f^{BAC}$.

Для компактных алгебр Ли $f^{ABC} \in Re$, действительно,

$$[t^A, t^B]^+ = (t^A t^B - t^B t^A)^+ = (t^B)^+ (t^A)^+ - (t^A)^+ (t^B)^+ =$$

$$= t^B t^A - t^A t^B = [t^B, t^A] = -[t^A, t^B]$$

$\Rightarrow$

$$(if^{ABC} t^C)^+ = -i (f^{ABC})^* t^C = -i f^{ABC} t^C$$

$$\Rightarrow \quad (f^{ABC})^* = f^{ABC}$$

Если генераторы компактной группы нормированы условием $\quad tr(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}$, то структурные константы будут антисимметричны по всем индексам. Действительно,

$$tr\left(t^A [t^B, t^C]\right) = tr\left(i t^A f^{BCD} t^D\right) = \frac{i}{2} f^{BCA}$$

$$\parallel$$

$$tr\left(t^A (t^B t^C - t^C t^B)\right) = tr\left(t^A t^B t^C - t^A t^C t^B\right)$$

$$= tr\left([t^A, t^B] t^C\right) = tr\left(i f^{ABD} t^D t^C\right) = \frac{i}{2} f^{ABC}$$

$\Rightarrow \quad f^{BCA} = f^{ABC} = -f^{BAC} \Rightarrow$ есть антисимметрия и по 2-му и 3-му индексам

$f^{BCA} = -f^{CBA} = f^{ABC} \Rightarrow$ есть и полная антисимметрия.

Запишем тождество Якоби в терминах структурных констант:

$$0 = [t^A[t^B, t^C]] + [t^B[t^C, t^A]] + [t^C[t^A, t^B]] =$$

$$= if^{BCD}[t^A, t^D] + if^{CAD}[t^B, t^D] + if^{ABD}[t^C, t^D] =$$

$$= \left(- f^{BCD}f^{ADE} - f^{CAD}f^{BDE} - f^{ABD}f^{CDE}\right)t^E$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = f^{BCD}f^{DAE} + f^{CAD}f^{DBE} + f^{ABD}f^{DCE}$$

§4. Представления групп и алгебр Ли

Говорят, что задано представление группы G, если $\forall\ \omega \in G$ поставлен в соответствие оператор $T(\omega)$, т.ч.

$$T(\omega_1\omega_2) = T(\omega_1)T(\omega_2)$$

$$\left(T(1) = 1\,;\ \ T(\omega^{-1}) = T(\omega)^{-1}\right)$$

Говорят, что задано представление алгебры Ли A если $\forall\ \alpha \in A$ поставлен в соответствие оператор $T(\alpha)$, т.ч.

$$T([\alpha, \beta]) = [T(\alpha), T(\beta)] = T(\alpha)T(\beta) - T(\beta)T(\alpha)$$

$$\left(T(0) = 0\right)$$

Тривиальное представление:

$$T(\omega) = 1 \quad \forall\ \omega \in G$$

$$T(\alpha) = 0 \quad \forall\ \alpha \in \mathcal{A}.$$

Фундаментальное представление – нетривиальное представление минимальной размерности

$$T(\omega) = \omega.$$

Если задано представление алгебры Ли $T(\alpha)$, то можно $T(\alpha)$ записать в виде

$$T(\alpha) = T(i\alpha^A t^A) = i\alpha^A T(t^A) \equiv T^A$$

При этом

$$[T(\alpha), T(\beta)] = T([\alpha, \beta]) = T(-i\alpha^A \beta^B f^{ABC} t^C) =$$

$$= -i\alpha^A \beta^B f^{ABC} T^C$$

$$[T(\alpha), T(\beta)] = [-i\alpha^A T^A, -i\beta^B T^B] = -\alpha^A \beta^B [T^A, T^B]$$

$$\Rightarrow [T^A, T^B] = i f^{ABC} T^C$$

– чтобы задать представление алгебры Ли, необходимо задать генераторы T^A, которые удовлетворяют тем же КС, что и генераторы t^A.

В частности, можно определить присоединённое представление, для которого

$$(T^A_{Adj})_{BC} \equiv +if^{ACB} \qquad \Big(= -if^{ABC} \text{ если } tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}\Big)$$

Тогда

$$[T^A, T^B]_{KL} = (T^A)_{KM}(T^B)_{ML} - (T^B)_{KM}(T^A)_{ML} =$$

$$= -f^{AMK}f^{BLM} + f^{BMK}f^{ALM} = -f^{LBM}f^{MAK} - f^{ALM}f^{MBK}$$

$$= f^{BAM}f^{MLK} = -f^{ABM} \cdot f^{MLK} = +if^{ABM}(+i)f^{MLK}$$

$$= if^{ABM}(T^M)_{KL}$$

– получается правильное КС.

Если есть некоторое поле ϕ_i преобразующееся по представлению группы G, то

$$\phi_i \to T(\omega)_i{}^j\phi_j \equiv \phi_i'$$

Если $\omega = e^\alpha \approx 1+\alpha$, то в линейном приближении

$$\delta\phi_i = \phi_i' - \phi_i = T(1+\alpha)_i{}^j\phi_j - \phi_i = (\delta_i{}^j + T(\alpha)_i{}^j)\phi_j - \phi_i$$

$$= T(\alpha)_i{}^j\phi_j$$

В случае если поле ϕ преобразуется по присоединённому представлению группы G, то

$$\delta\phi_B = \underset{Adj}{T}(\alpha)_{BC}\phi_C = \underset{Adj}{T}(i\alpha^A t^A)_{BC}\phi_C = i\alpha^A \underset{Adj}{T}(t^A)_{BC}\phi_C =$$

$= i\alpha^A (T^A_{Adj})_{BC} \phi_C = -\alpha^A f^{ACB} \phi_C$

Это можно записать в более красивом виде если определить величину

$\phi \equiv i\phi^A t^A \in \mathcal{A}$

(которая лежит в алгебре Ли группы G)

тогда $\delta\phi = i\delta\phi^B t^B = -i\alpha^A f^{ACB} \phi_C t^B = [\alpha, \phi]$

Действительно,

$[\alpha, \phi] = [i\alpha^B t^B, i\phi^C t^C] = -if^{BCA} \alpha^B \phi^C t^A =$

$= -if^{ACB} \alpha^A \phi^C t^B$ — верно.

т.о. если $\phi = i\phi^A t^A$, то $\delta\phi = [\alpha, \phi]$

— закон бесконечно малого преобразования поля, которое лежит в присоединённом представлении.

При конечных преобразованиях

$\phi \to \omega\phi\omega^{-1}$, действительно, тогда $(\omega = e^\alpha)$

$\delta\phi = \omega\phi\omega^{-1} - \phi \approx (1+\alpha)\phi(1-\alpha) - \phi \approx \alpha\phi - \phi\alpha =$

$= [\alpha, \phi]$

При этом если $\phi \in \mathcal{A}$, то $\omega\phi\omega^{-1} \in \mathcal{A}$, т.к.

$$\omega \phi \omega^{-1} = e^{\alpha}\phi e^{-\alpha} = \phi + \frac{1}{1!}[\alpha,\phi] + \frac{1}{2!}[\alpha,[\alpha,\phi]]$$

$$+ \frac{1}{3!}[\alpha,[\alpha,[\alpha,\phi]]] + \dots \in \mathcal{A}$$, т.к. если $\phi, \alpha \in \mathcal{A}$, то

$[\alpha,\phi] \in \mathcal{A}$ и $\Rightarrow [\alpha[\alpha,\phi]] \in \mathcal{A}$ и т.д.

<u>Пример</u> Рассмотрим группу $SU(2)$:

$t^A = \sigma^A/2$, т.к. $\alpha = -i\alpha^A \sigma^A/2$

(знак „-" введён для удобства дальнейших обозначений). тогда

$$\omega = e^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-i\alpha^A\sigma^A\right)^n \frac{1}{2^n}$$

$$\left(\alpha^A\sigma^A\right)^2 = \alpha^A\alpha^B\sigma^A\sigma^B = \alpha^A\alpha^B \cdot \frac{1}{2}\{\sigma^A,\sigma^B\} = \vec{\alpha}^2 \cdot 1_2 .$$

$$\Rightarrow$$

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \cdot (-1)^k \left(\frac{\vec{\alpha}^2}{4}\right)^k - i\alpha^A\sigma^A \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2k}}$$

$$\left(\frac{\vec{\alpha}^2}{4}\right)^k \cdot (-1)^k = \left[\alpha^A \equiv n^A \alpha \text{ , где } \alpha \equiv \sqrt{\vec{\alpha}^2},\ \vec{n}^2 = 1\right]$$

$$= \cos(\alpha/2) \cdot 1_2 - i n^A \sigma^A \cdot \sin(\alpha/2) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha/2 - i n^3 \sin\alpha/2 & -i n^1 \sin\alpha/2 - n^2 \sin\alpha/2 \\ -i n^1 \sin\alpha/2 + n^2 \sin\alpha/2 & \cos\alpha/2 + i n^3 \sin\alpha/2 \end{pmatrix}$$

– экспоненциальное отображение даёт произвольный элемент группы $SU(2)$.

$$[t^A, t^B] = \left[\frac{\sigma^A}{2}, \frac{\sigma^B}{2}\right] = \frac{1}{4}\cdot 2i\,\varepsilon^{ABC}\sigma^C = \frac{i}{2}\varepsilon^{ABC}\sigma^C$$

$$= i\varepsilon^{ABC}t^C \implies f^{ABC} = \varepsilon^{ABC}$$

– видна полная антисимметрия структурных констант.

Генераторы присоединённого представления

$$(T^A_{Adj})_{BC} = i f^{ACB} = -i\varepsilon^{ABC}\quad, \text{ т.е.}$$

$$T^1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T^2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – получились генераторы группы $SO(3)$, причём

$$[T^A, T^B] = +i\varepsilon^{ABC}T^C,$$ например

$$T^1T^2 - T^2T^1 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iT^3$$ $\implies$ алгебры Ли групп $SU(2)$ и $SO(3)$ совпадают:

$$su(2) = so(3)$$

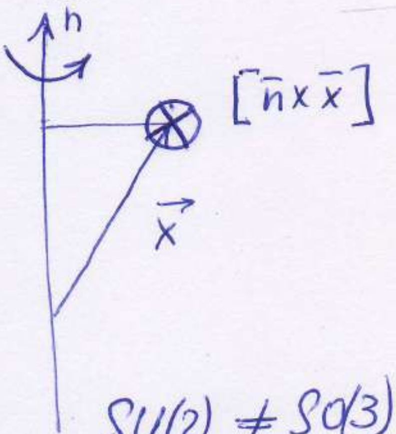
$SO(3)$ преобразования соответствуют поворотам в трёхмерном пространстве:

$$\delta \vec{x} = \alpha \vec{x} \qquad \text{где } \alpha \in so(3)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \delta x_B = -i\alpha^A \cdot (-i)\varepsilon_{ABC} x_C = \varepsilon_{BAC}\alpha^A x_C$$

$\delta \vec{x} = [\vec{\alpha}, \vec{x}]$ – изменение вектора при бесконечно малом повороте.

Если $\vec{\alpha} = \alpha \vec{n}$, то α – угол поворота, а $\vec{n}$ – направление поворота, см. рис.



Заметим, что хотя $su(2) = so(3)$, $SU(2) \neq SO(3)$.

Действительно, при $\alpha = 2\pi$

$$\exp\left(-i\alpha^A \frac{\sigma^A}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\pi & 0 \\ 0 & \cos\pi \end{pmatrix} = -1_2$$

тогда как поворот на $\alpha = 2\pi$ – тождественное преобразование,

$$\exp\left(-i\alpha^A T^A\right) = 1_3$$

$\Rightarrow$ одному элементу $SO(3)$ соответствуют 2 элемента $SU(2)$:

$$SO(3) = SU(2)/Z_2.$$

Глава VI. Неабелевы калибровочные теории

§1. Поля Янга-Миллса

Как ранее строилась скалярная электродинамика?

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \quad \text{где} \quad \mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^* \phi), \quad \text{где} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Теперь рассмотрим как можно обобщить эту конструкцию. В качестве исходной точки возьмём

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - V(\phi^+ \phi) \quad \text{где}$$

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad \text{– столбец из скалярных полей}$$

Такая теория инвариантна относительно глобальных калибровочных преобразований

$$\phi \to \omega \phi \; ; \; \phi^+ \to \phi^+ \omega^+ = \phi^+ \omega^{-1}$$

где $\omega \neq \omega(x) \in U(n)$, т.е. $\omega^+ = \omega^{-1}$.

Если потенциал имеет более сложный вид,

$V(\phi, \phi^*)$, то инвариантность будет относительно преобразований некоторой компактной группы G:
$$\omega \in G; \quad \omega^{-1} = \omega^+$$

т.к. тогда
$$\partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi \longrightarrow \partial_\mu \phi^+ \cdot \omega^{-1} \cdot \omega \partial^\mu \phi = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi$$

При этом локальная калибровочная инвариантность отсутствует, поскольку если $\omega = \omega(x)$, то
$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu (\omega \phi) = \partial_\mu \omega \cdot \phi + \omega \partial_\mu \phi$$

Чтобы добиться локальной инвариантности, необходимо добавить в теорию калибровочное поле:
$$\partial_\mu \phi \longrightarrow \mathcal{D}_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi + A_\mu \phi$$
где A_μ - некоторая $n \times n$ матрица, чтобы $A_\mu \phi$ было бы n-компонентным столбцом.

При этом ковариантная производная $\mathcal{D}_\mu \phi$ при локальных преобразованиях должна меняться также как и само поле ϕ:
$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi \longrightarrow \omega \mathcal{D}_\mu \phi, \text{ т.е.}$$

$$\partial_\mu \phi' + A'_\mu \phi' = \omega \partial_\mu \phi$$

$$\partial_\mu (\omega\phi) + A'_\mu \, \omega\phi = \omega \left(\partial_\mu \phi + A_\mu \phi\right)$$

Решаем это уравнение относительно A'_μ:

$$A'_\mu \cdot \omega\phi = \cancel{\omega \partial_\mu \phi} + \omega A_\mu \phi - \partial_\mu \omega \cdot \phi - \cancel{\omega \partial_\mu \phi}$$

$$A'_\mu \cdot \omega\phi = \left(\omega A_\mu \omega^{-1} - \partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1}\right)\omega\phi$$

В силу произвольности Φ отсюда получаем

$$A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} - \partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1}$$

При этом

$$0 = \partial_\mu 1 = \partial_\mu (\omega \cdot \omega^{-1}) = \partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

Поэтому $\partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1} = -\omega \partial_\mu \omega^{-1}$ и $\Rightarrow$

$$\boxed{A_\mu \longrightarrow A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}}$$

До сих пор мы считали, что A_μ - произвольная $n \times n$- матрица. Однако теперь можно заметить, что A_μ можно считать лежащим в алгебре Ли калибровочной группы. Действительно, пусть

$A_\mu \in \mathcal{A}$ - алгебре Ли калибровочной группы G.

тогда

$$\omega A_\mu \omega^{-1} = e^{\alpha} A_\mu e^{-\alpha} = \underbrace{A_\mu}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{[\alpha, A_\mu]}_{\in \mathcal{A}} + \frac{1}{2!}\underbrace{[\alpha,[\alpha,A_\mu]]}_{\in \mathcal{A}} + \ldots$$

$\in \mathcal{A}$ поскольку $A_\mu \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in \mathcal{A}$.

Кроме того

$$\omega \partial_\mu \omega^{-1} = \omega \hat{\partial}_\mu \omega^{-1} - \hat{\partial}_\mu$$

т.к.

$$\omega \hat{\partial}_\mu \omega^{-1} \cdot f = \omega \partial_\mu (\omega^{-1} f) = \omega \partial_\mu \omega^{-1} \cdot f + \partial_\mu f$$

Однако

$$\omega \hat{\partial}_\mu \omega^{-1} - \hat{\partial}_\mu = e^{\alpha} \hat{\partial}_\mu e^{-\alpha} - \hat{\partial}_\mu = \cancel{\hat{\partial}_\mu} + [\alpha, \hat{\partial}_\mu] +$$

$$+ \frac{1}{2!}[\alpha,[\alpha,\hat{\partial}_\mu]] + \frac{1}{3!}[\alpha[\alpha[\alpha,\hat{\partial}_\mu]]] + \ldots - \cancel{\hat{\partial}_\mu} =$$

$$= \underbrace{-\partial_\mu \alpha}_{\in \mathcal{A}} - \frac{1}{2!}\underbrace{[\alpha, \partial_\mu \alpha]}_{\in \mathcal{A}} - \frac{1}{3!}\underbrace{[\alpha,[\alpha,\partial_\mu \alpha]]}_{\in \mathcal{A}} - \ldots \in \mathcal{A}.$$

$\Rightarrow$ Если $A_\mu \in \mathcal{A}$, то $\omega A_\mu \omega^{-1} \in \mathcal{A}$ и $\omega \partial_\mu \omega^{-1} \in \mathcal{A}$.

Поэтому $A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \in \mathcal{A}$

и $\Rightarrow$ калибровочные преобразования не выводят за пределы алгебры Ли. Поэтому далее мы будем считать, что $A_\mu \in \mathcal{A}$.

т.о. мы получаем локально калибровочно инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{D}_\mu \phi^+ \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^+\phi)$$

где $\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu \phi + A_\mu\phi$

$$\mathcal{D}_\mu\phi^+ \equiv (\mathcal{D}_\mu\phi)^+ = \partial_\mu\phi^+ + \phi^+ A_\mu^+ = \partial_\mu\phi^+ - \phi^+A_\mu$$

поскольку у компактных групп Ли соответствующие алгебры Ли состоят из антиэрмитовых матриц и $\Rightarrow A_\mu^+ = -A_\mu$.

При этом

$$\mathcal{D}_\mu\phi^+ \longrightarrow \partial_\mu(\phi^+\omega^+) - (\phi^+\omega^+)(\omega A_\mu \omega^{-1} + \omega\partial_\mu\omega^{-1}) =$$

$$= \partial_\mu\phi^+\omega^{-1} + \cancel{\phi^+\partial_\mu\omega^{-1}} - \phi^+\cancel{\omega^{-1}}\cancel{\omega}A_\mu\omega^{-1} - \cancel{\phi^+\omega^{-1}\omega\partial_\mu\omega^{-1}}$$

$$=(\partial_\mu\phi^+ - \phi^+A_\mu)\omega^{-1} = \mathcal{D}_\mu\phi^+\omega^{-1}$$

где $\omega=\omega(x)\in G$ и $\omega^+=\omega^{-1}$

Однако ещё в лагранжиан необходимо добавить некий аналог $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2$ в эл./д.

Чтобы это сделать вначале построим тензор поля в абелевом случае:

Оказывается, что правильное выражение имеет вид

$$F_{\mu\nu} = \underset{\in \mathcal{A}}{\partial_\mu A_\nu} - \underset{\in \mathcal{A}}{\partial_\nu A_\mu} + \underset{\in \mathcal{A}}{[A_\mu, A_\nu]} \in \mathcal{A}$$

— такая величина также будет лежать в алгебре Ли калибровочной группы.

Дело в том, что определённой таким образом $F_{\mu\nu}$ простым образом изменяется при калибровочных преобразованиях:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu =$$

$$= \partial_\mu A_\nu + A_\mu A_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \partial_\mu (\omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\nu \omega^{-1}) + (\omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}) \cdot$$

$$(\omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\nu \omega^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu) =$$

$$= \partial_\mu \omega \cdot A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu A_\nu \omega^{-1} + \cancel{\omega A_\nu \partial_\mu \omega^{-1}} + \partial_\mu \omega\, \partial_\nu \omega^{-1}$$

$$+ \omega \partial_\mu \partial_\nu \omega^{-1} + \omega A_\mu A_\nu \omega^{-1} + \cancel{\omega A_\mu \partial_\nu \omega^{-1}} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \cdot \omega A_\nu \omega^{-1}$$

$$+ \omega \partial_\mu \omega^{-1} \cdot \omega \partial_\nu \omega^{-1} - (\mu \leftrightarrow \nu) = \left[\omega \partial_\mu \omega^{-1} = - \partial_\mu \omega \cdot \omega^{-1} \right]$$

$$= \cancel{\partial_\mu \omega A_\nu \omega^{-1}} + \omega \partial_\mu A_\nu \omega^{-1} + \cancel{\partial_\mu \omega \partial_\nu \omega^{-1}} + \omega A_\mu A_\nu \omega^{-1}$$

$$- \cancel{\partial_\mu \omega A_\nu \omega^{-1}} - \cancel{\partial_\mu \omega \partial_\nu \omega^{-1}} - (\mu \leftrightarrow \nu) =$$

$$= \omega\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\right)\omega^{-1} = \omega F_{\mu\nu}\omega^{-1}$$

т.о. при локальных калибровочных преобразованиях

$$\boxed{F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu}\omega^{-1}}$$

в то время как и $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ и $[A_\mu, A_\nu]$ по-отдельности преобразуются более сложным образом.

Заметим, что в неабелевом случае $\omega F_{\mu\nu}\omega^{-1} \neq F_{\mu\nu}$ так что тензор поля уже не будет калибровочно инвариантен.

Однако с помощью $F_{\mu\nu}$ можно легко построить калибровочно инвариантный лагранжиан

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}^2$$ где e – константа связи.

Действительно,

$$\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}^2 \longrightarrow \mathrm{tr}\left(\cancel{\omega} F_{\mu\nu}\cancel{\omega^{-1}}\cdot\cancel{\omega} F^{\mu\nu}\cancel{\omega^{-1}}\right) = \mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}^2 = \mathrm{inv}$$

где была использована возможность совершать циклические перестановки под знаком следа.

В итоге получаем теорию описываемую лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu\Phi^+\mathcal{D}^\mu\Phi - V(\Phi^+\Phi)$$

Она инвариантна относительно локальных калибровочных преобразований

$$\phi \to \omega \phi \qquad A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

$$\phi^+ \to \phi^+ \omega^{-1} \qquad F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}$$

где $\omega^+ = \omega^{-1}$ и $\omega = \omega(x) \in G$ ($= U(n)$ для $V(\phi^+\phi)$

или $\omega \in G$ для более сложных потенциалов)

Поле A_μ называется полем Янга-Миллса или неабелевым калибровочным полем.

„Чистая" теория Янга-Миллса – это

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2 .$$

Почему в этой функции такой коэффициент?
т.к. $A_\mu \in \mathcal{A}$, $F_{\mu\nu} \in \mathcal{A}$, то эти величины можно разложить по генераторам:

$$A_\mu \equiv ie A_\mu^A t^A \ ; \quad F_{\mu\nu} \equiv ie F_{\mu\nu}^A t^A \quad , A = \overline{1, \dim G}$$

причём $\operatorname{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$. Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr}\left(ie F_{\mu\nu}^A t^A \cdot ie F_{\mu\nu}^B t^B\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^B \operatorname{tr}(t^A t^B) = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^A\right)^2$$

Поэтому аналогом $F_{\mu\nu}$ в эл/д. являются скорее $F_{\mu\nu}^A$, а аналогом A_μ — $\dim G$ шт. A_μ^A.

Выразим $F_{\mu\nu}^A$ через A_μ^A:

$$F_{\mu\nu} = ie F_{\mu\nu}^A t^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] =$$

$$= \partial_\mu (ie A_\nu^A t^A) - \partial_\nu (ie A_\mu^A t^A) + [ie A_\mu^B t^B, ie A_\nu^C t^C] =$$

$$= ie t^A (\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A) - ie^2 f^{BCA} A_\mu^B A_\nu^C t^A =$$

$$= ie t^A [\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - e f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C]$$

(где была использована полная антисимметрия структурных констант)

$$\Rightarrow F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - e f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C \in \mathrm{Re}.$$

В общем случае калибровочная теория описывается

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A)^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^+ \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^+, \phi) \qquad (*)$$

где поле ϕ лежит в некотором представлении калибровочной группы, т.е.

$\phi \longrightarrow T(\omega)\phi$ (обычно вместо $T(\omega)$ пишут просто ω)

При этом

$$\delta \Phi = T(\alpha)\Phi = ie\alpha^A T^A \Phi \quad , \text{где } T^A = T(t^A).$$

если $\omega = e^{\alpha}$ и $\alpha = ie\alpha^A t^A$

Ковариантная производная при этом имеет вид

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + T(A_\mu)\Phi = \partial_\mu \Phi + ieA_\mu^A T^A \Phi$$

Но обычно $T(A_\mu)$ не пишут, а просто пишут

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + A_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ieA_\mu^A T^A \Phi$$

предполагая, что разложение ведётся по генераторам того представления, в котором лежат поле Φ.

Запишем уравнения движения для теории (*).

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \quad \text{где } \varphi_i = (\Phi^+, \Phi, A_\nu^A)$$

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^+)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^+} \quad \text{где}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^+)} = \mathcal{D}^\mu \Phi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^+} = -A_\mu \mathcal{D}^\mu \Phi - \frac{\partial V}{\partial \Phi^+}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \partial_\mu \mathcal{D}^\mu \Phi + A_\mu \mathcal{D}^\mu \Phi + \frac{\partial V}{\partial \Phi^+} = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Phi + \frac{\partial V}{\partial \Phi^+}$$

Аналогичным образом

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \mathcal{D}^\mu \phi^+ + \mathcal{D}^\mu \phi^+ A_\mu + \frac{\partial V}{\partial \phi} =$$

$$= \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi^+ + \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Более сложно получить уравнение движения для калибровочного поля A_ν^A:

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^A)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^A}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^A)} = - F^{\mu\nu A}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}^B} \cdot \frac{\partial F_{\alpha\beta}^B}{\partial A_\nu^A} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}_\mu \phi)} \frac{\partial(\mathcal{D}_\mu \phi)}{\partial A_\nu^A} + \frac{\partial(\mathcal{D}_\mu \phi^+)}{\partial A_\nu^A} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{D}_\mu \phi^+)} =$$

$$= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta B} \frac{\partial}{\partial A_\nu^A} \Big[\underbrace{\cancel{\partial_\alpha A_\beta^B}}_{0} - \underbrace{\cancel{\partial_\beta A_\alpha^B}}_{0} - e f^{BCD} A_\alpha^C A_\beta^D \Big] +$$

$$+ \mathcal{D}^\mu \phi^+ \cdot ie \delta_\mu^\nu T^A \phi - ie \delta_\mu^\nu \phi^+ T^A \mathcal{D}^\mu \phi =$$

$$= \frac{e}{2} f^{BCD} F^{\alpha\beta B} \cdot \left(\delta^{AC} \delta_\alpha^\nu A_\beta^D + A_\alpha^C \delta^{AD} \delta_\beta^\nu \right) +$$

$$+ ie \mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - ie \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi =$$

$$= \frac{1}{2} e f^{BAD} F^{\nu\beta B} A_\beta^D + \frac{1}{2} e f^{BCA} F^{\alpha\nu B} A_\alpha^C +$$

$$+ ie \mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - ie \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi =$$

$$= -e f^{ABC} F^{\nu\mu B} A_\mu^C + ie \mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - ie \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi$$

$$= -e f^{ABC} A_\mu^B F_{\mu\nu}^C + ie \mathcal{D}^\nu \phi^+ T^A \phi - ie \phi^+ T^A \mathcal{D}^\nu \phi.$$

Поэтому уравнения движения принимают вид

$$0 = -\partial_\mu F_{\mu\nu}^A + e f^{ABC} A_\mu^B F_{\mu\nu}^C - ie \mathcal{D}_\nu \phi^+ T^A \phi +$$

$$+ ie \phi^+ T^A \mathcal{D}_\nu \phi$$

Запишем это ур-е движения в более красивом виде:

$$ie t^A \;\Big|\; \partial_\mu F_{\mu\nu}^A - e f^{ABC} A_\mu^B F_{\mu\nu}^C = -ie \mathcal{D}_\nu \phi^+ T^A \phi - + ie \phi^+ T^A \mathcal{D}_\nu \phi$$

Тогда получим слева

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = \partial_\mu (ie F^{\mu\nu A} t^A) + [ie A_\mu^B t^B, ie F^{\mu\nu C} t^C] = ie t^A [\partial_\mu F^{\mu\nu A} - e f^{ABC} A_\mu^B F^{\mu\nu C}]$$

Эта величина представляет собой ковариантную производную тензора поля:

$$\mathcal{D}_\mu F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\mu F_{\alpha\beta} + [A_\mu, F_{\alpha\beta}]$$

Д/З Доказать, что при калибровочных преобразованиях $\mathcal{D}_\mu F_{\alpha\beta} \longrightarrow \omega \mathcal{D}_\mu F_{\alpha\beta} \omega^{-1}$

Поэтому ур-е движения для калибровочного поля можно записать в виде, похожем на уравнение Максвелла:

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \text{ , где}$$

$$j^\nu \equiv iet^A \big[\underbrace{-ie\,\mathcal{D}_\nu\phi^+ T^A\phi + ie\phi^+ T^A \mathcal{D}_\nu\phi}_{\in Re}\big] \in A.$$

– этот ток также лежит в алгебре Ли калибровочной группы.

Что будет являться аналогом ур-й Максвелла без источников?

Д/З Доказать, что тензор поля теории Янга-Миллса удовлетворяет т.н. тождеству Бьянки

$$0 = \mathcal{D}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \text{ , где } \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

(аналог соотношения $0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$ в эл/д.)

§2. Электродинамика как частный случай теории Янга-Миллса

Электродинамика представляет собой частный случай теории Янга-Миллса, которой соответствует группе $U(1)$:

В случае группы $U(1)$ ω можно представить в виде $\omega = \exp(ie\alpha/\sqrt{2})$ где α - Re число.

При этом калибровочное поле $A_\mu = ieA_\mu^A t^A$ записывается как

$$A_\mu = ie A_{\mu\, эл/д} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$ где $A_{\mu\, эл/д}$ - калибровочное поле в электродинамике

т.к. $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$ и $t^A \sim 1/\sqrt{2}$

Закон калибровочного преобразования имеет вид

$$A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} = A_\mu + \exp(ie\alpha/\sqrt{2})\partial_\mu \exp\left(-\frac{ie\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{ie}{\sqrt{2}} A_{\mu\, эл/д.} \longrightarrow \frac{ie}{\sqrt{2}} A_{\mu\, эл/д.} - \frac{ie}{\sqrt{2}}\partial_\mu \alpha$$

$$\Rightarrow \quad A_{\mu\, эл/д.} \to A_{\mu\, эл/д.} - \partial_\mu \alpha$$

- стандартный закон калибровочного преобразования в электродинамике.

$$S_{ЯМ} = \frac{1}{2e^2} tr \int d^4x\, F_{\mu\nu}^2$$ где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{=0} \Rightarrow \frac{ie}{\sqrt{2}}\left(\partial_\mu A_{\nu\, эл/д.} - \partial_\nu A_{\mu\, эл/д}\right)$$

$= 0$ для $U(1)$, т.к. A_μ - числа

$$\Rightarrow$$

$$S_{ЯМ} = -\frac{1}{4}\int d^4x \left(\partial_\mu A_{\nu\, эл/д} - \partial_\nu A_{\mu\, эл/д.}\right)^2$$

Ковариантная производная

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + A_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ie A_{\mu\, эл/д} \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi$$

Сравнивая это выражение с полученными ранее результатами, заключаем, что необходимо провести отождествление

$$e = -\sqrt{2}\, e_{эл/д}.$$

Тогда

$$\omega = \exp(-ie_{эл/д}\alpha) \; ; \quad \Phi \to \exp(-ie_{эл/д}\alpha)$$

$$A_{\mu\, эл/д} \to A_{\mu\, эл/д.} - \partial_\mu \alpha$$

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - ie_{эл/д} A_{\mu\, эл/д.} \Phi$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2_{\mu\nu\, эл/д} + \mathcal{D}_\mu \Phi^* \mathcal{D}^\mu \Phi - V(\Phi^* \Phi)$$

– воспроизвелись все предыдущие результаты.

Итак, эл./д. представляет собой частный случай теории Янга-Миллса, который соответствует тому, что калибровочная группа G совпадает с абелевой группой $U(1)$.

(Хотя обозначения в теории Янга-Миллса и в эл/д. несколько различаются, см. выше)

§ 3. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией. Пример.

Как исследовать спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией?

Рассмотрим следующий пример:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_i^2 - v^2)^2 \quad \text{где } i = 1,2,3 \text{ и } \phi_i \in Re.$$

Эта теория очевидно инвариантна относительно $SO(3)$ преобразований

$$\phi_i \to \omega_i^{\ j} \phi_j \quad \text{где} \quad \omega \in SO(3), \quad \omega \neq \omega(x).$$

Тогда вакуумное состояние $\phi_{0i} \neq \phi_{0i}(x)$ является минимумом

$$V(\phi_i) = \frac{\lambda}{2}(\phi_i^2 - v^2)^2$$

т.е. удовлетворять условию $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = v^2$.

Можно взять, например,

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Затем поле ϕ представляется в виде

$$\phi = \phi_0 + \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \varphi_3 \end{pmatrix}$$

где φ_i - малое отклонение поля ϕ от вакуумного состояния ϕ_0.

Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_i)^2 - \frac{\lambda}{2}\left[\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + (\varphi_3 + v)^2 - v^2\right]^2 \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_3)^2 - \frac{\lambda}{2}\cdot(2\varphi_3 v)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_3)^2 - 2\lambda v^2 \varphi_3^2$$

Поэтому в спектре частиц теории присутствуют 2 голдстоуновских бозона φ_1 и φ_2, масса которых равна 0 и 1 хиггсовский бозон φ_3 с массой

$$m = 2v\sqrt{\lambda}$$

Существование голдстоуновских бозонов - характерная особенность теорий со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией,

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \to \omega\Phi_0 \text{ в общем случае } \neq \Phi_0.$$

Д/З Исследовать спектр частиц в теории, описываемой

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - \lambda(\Phi^+\Phi - v^2)^2 \quad \text{где} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} -$$

комплексный столбец. (Такая теория инвариантна относительно преобразований $\Phi \to \omega\Phi$ где $\omega \neq \omega(x)$ и $\omega \in SU(2)$)

Можно ли рассмотреть общий случай?

§4. Спектр частиц в теориях с глобальной калибровочной симметрией (Общий случай)

Рассмотрим теорию, описываемую функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 - V(\phi_i)$$

где $\phi_i \in Re$. (Комплексное поле всегда можно представить как 2 вещественных, поэтому этим мы никак не ограничиваем общность)

Предполагаем, что эта теория инвариантна относительно преобразований компактной группы G:

$$\phi_i \to \omega_i{}^j \phi_j \quad , \quad \omega \in G \qquad \begin{array}{l} \omega \neq \omega(x) \\ \omega \in Re \\ \omega^T \omega = 1 . \end{array}$$

Как исследовать спектр частиц в этой теории? Вначале построим вакуумное состояние ϕ_{0i}. Как и ранее, $\phi_{0i} \neq \phi_{0i}(x)$ и $V(\phi_{0i}) \to min$.

Затем строим т.н. малую группу $H \subset G$, которая по определению состоит из всех $\omega \in G$, т.ч.

$$\omega \phi_0 = \phi_0 .$$

Такое множество действительно является группой т. к.

1) Если $\omega_1 \in H$ и $\omega_2 \in H$, то

$$\omega_1 \omega_2 \Phi_0 = \omega_1 \Phi_0 = \Phi_0 \quad \text{и} \Rightarrow \omega_1 \omega_2 \in H$$

2) $\omega = 1 \in H$, т. к. $1 \cdot \Phi_0 = \Phi_0$.

3) Если $\omega \in H$, то $\omega^{-1} \in H$, действительно,

$$\omega \Phi_0 = \Phi_0 \Rightarrow \omega^{-1} \omega \Phi_0 = \omega^{-1} \Phi_0 \Rightarrow \omega^{-1} \Phi_0 = \Phi_0.$$

Т.о. множество H является подгруппой исходной калибровочной группы G.

Как устроена алгебра Ли малой группы H? Если

$$\omega = e^{\alpha} \in H, \text{ то}$$

$$\omega \Phi_0 = e^{\alpha} \Phi_0 = \Phi_0$$

Считая α малым в низшем порядке получим, что

$$(1+\alpha)\Phi_0 = \Phi_0 \quad \text{и} \Rightarrow \alpha \Phi_0 = 0$$

(Эквивалентно, $\alpha_i{}^j \Phi_{0j} = 0$ если выписывать индексы)

$\Rightarrow$ элементы алгебры Ли малой группы H дают 0 при действии на вакуумное состояние Φ_0.

Разделим теперь генераторы исходной калибровочной группы G на 2 части – генераторы H и все остальные:

$$T^A = \{\underbrace{T_H^\alpha}_{\text{малая группа}}, \underbrace{T_{G/H}^a}_{\text{остальное}}\}$$

(G/H - просто обозначение, а не фактор-группа)

$A = \overline{1, \dim G}$ $\quad a = \overline{1, \dim G - \dim H}$

$\alpha = \overline{1, \dim H}$

Тогда очевидно, что $iT_H^a \phi_0 = 0$.

Кроме того, $iT_{G/H}^a \phi_0 \equiv E^a$ - набор линейно независимых векторов (Если бы $\exists$ нулевая линейная комбинация $c^a E^a = 0$, то $ic^a T_{G/H}^a$ лежал бы в алгебре Ли малой группы)

$\Rightarrow E^a$ - базис в некотором пространстве

($E_i^a = i(T_{G/H}^a)_i{}^j \phi_{0j}$ - это подпр-во в пр-ве столбцов)

Но в общем случае E^a не образуют ОНБ (ортонормированный базис).

Построим e^a - ОНБ в этом пространстве.

Но он не является базисом во всём пр-ве столбцов. Пусть $(e^a, \tilde{e}^{\tilde{a}})$ - ОНБ в пр-ве столбцов.

$\tilde{a} = \overline{1, \dim R - \dim G + \dim H}$ $\quad$ если $i = \overline{1, \dim R}$

Это означает, что

$$e_i^a e_i^b = \delta^{ab}; \quad e_i^a \tilde{e}_i^{\tilde{a}} = 0; \quad \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{e}_i^{\tilde{b}} = \delta^{\tilde{a}\tilde{b}}.$$

(по индексу i, как обычно, суммирование)

Представим Φ_i в виде

$\Phi_i = \Phi_{0i} + \varphi_i$, где φ_i - малое отклонение от вакуумного состояния,

и разложим φ_i по базису $(e^a, \tilde{e}^{\tilde{a}})$:

$$\varphi_i \equiv e^a \varphi^a + \tilde{e}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}, \text{ т.ч.}$$

$$\Phi_i = \Phi_{0i} + e_i^a \varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$$

$$\partial_\mu \Phi_i = e_i^a \partial_\mu \varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$$

В силу ортонормированности базиса $(e^a, \tilde{e}^{\tilde{a}})$

$$(\partial_\mu \Phi_i)^2 = (\partial_\mu \varphi^a)^2 + (\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}})^2$$

Разложим теперь потенциал $V(\Phi_i)$ в ряд по φ:

$$V(\Phi_i) = V(\Phi_{0i} + e_i^a \varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}) = \underbrace{\cancel{V(\Phi_0)}}_{(const)} + \frac{\partial V}{\partial \Phi_i}(\Phi_0) \cdot$$

$$\cdot (e_i^a \varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j}(\Phi_0)(e_i^a \varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}) \cdot$$

$$\cdot (e_j^b \varphi^b + \tilde{e}_j^{\tilde{b}} \tilde{\varphi}^{\tilde{b}}) + \ldots$$

0 т.к. Φ_0 — минимум $V(\Phi)$

($V(\Phi_0)$ - несущественная постоянная не влияющая на уравнения движения)

$\forall\ \omega \in G \quad V(\Phi) = V(\omega\Phi)$ в силу калибровочной инвариантности.

$\Rightarrow$ если $V(\Phi_0) \to \min$, то $V(\omega\Phi_0) \to \min$, т.е. $\omega\Phi_0$ - также минимум потенциала.

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial V}{\partial \Phi_i}(\omega\Phi_0) = \frac{\partial V}{\partial \Phi_i}(e^{\alpha}\Phi_0) \approx \frac{\partial V}{\partial \Phi_i}(\Phi_0 + \alpha\Phi_0)$$

Разложим α по генераторам:

$$\alpha = i\alpha_H^{\alpha} T_H^{\alpha} + i\alpha_{G/H}^{a} T_{G/H}^{a}$$

$$\alpha\Phi_0 = (\underbrace{\cancel{i\alpha_H^{\alpha} T_H^{\alpha}}}_{0} + i\alpha_{G/H}^{a} T_{G/H}^{a})\Phi_0 = \alpha_{G/H}^{a} E^{a}$$

т.к. E^a и e^a - 2 базиса в одном и том же пространстве, то $E^a = K^{ab} e^b$, где K^{ab} - невырожденная матрица. Поэтому

$$\alpha\Phi_0 = \alpha_{G/H}^{a} E^{a} = \alpha_{G/H}^{a} K^{ab} e^{b}.$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial V}{\partial \Phi_i}(\Phi_{0_j} + \alpha_{G/H}^{a} K^{ab} e_j^{b}) = \underbrace{\cancel{\frac{\partial V}{\partial \Phi_i}(\Phi_0)}}_{0\ (\Phi_0 - \min)} +$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j}(\Phi_0)\, \alpha_{G/H}^{a} K^{ab} e_j^{b}$$

В силу произвольности $\alpha_{G/H}^{a}$ и невырожденности K^{ab} отсюда $\Rightarrow$ что

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0) e_j^b = 0$$

Поэтому

$$V(\phi_i) \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0)\, \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} \cdot \tilde{e}_j^{\tilde{b}} \tilde{\varphi}^{\tilde{b}} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$$ где

$$(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\phi_0)\, \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{e}_j^{\tilde{b}}$$

и с точностью до несущественной постоянной $V(\phi_0)$

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^a)^2 + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}})^2 - \frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{b}}}_{\text{массивные хиггсовские бозоны}}$$

безмассовые голдстоуновские бозоны.

$\Rightarrow$ в спектре частиц будет

1) $\dim G - \dim H$ безмассовых голдстоуновских бозонов φ^a.

2) $\dim R - \dim G + \dim H$ массивных хиггсовских бозонов $\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$.

(Ортогональным преобразованием $\tilde{\varphi}^{\tilde{a}} \to A^{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$ матрицу m^2 можно привести к диагональному виду, т.ч. ее СЗ будут квадратами масс)

Проиллюстрируем все эти конструкции на рассмотренном ранее примере.

$$G = SO(3) \quad , \quad \phi_i \in Adj \quad , \quad i=1,2,3$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_i^2 - v^2)^2$$

$$\phi_{0i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow$$ $H = U(1) = SO(2)$ – группа вращений вокруг 3-ей оси.

$\Big(e^{i\alpha} \in U(1) \sim \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$, причём можно проверить, это соответствие согласовано с операцией умножения,

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \sim \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\Big)$$

Генераторы группы G делим на T_H^α и $T_{G/H}^A$

$$T^1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv T_{G/H}^1$$

$$T^2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv T_{G/H}^2$$

$$T^3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv T_H$$, действительно,

$$iT_H \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$ – генератор H даёт 0 при действии на вакуум.

$$E^1 = iT^1_{G/H}\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E^2 = iT^2_{G/H}\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– получились ненулевые линейно независимые векторы. Но они не нормированы на 1. Другой базис в пространстве их линейных комбинаций – это

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– но это не будет базис в пространстве 3-х компонентных столбцов. Поэтому добавим ещё

$$\tilde{e} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{т.ч.} \quad (e^1, e^2, \tilde{e}) \text{ – ОНБ}$$

$$\Phi = \Phi_0 + e^a\varphi^a + \tilde{e}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \underset{(e^1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}\varphi_1 + \underset{(e^2)}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\varphi_2$$

$$+ \underset{(\tilde{e})}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$$

В соответствии с общей теоремой φ_1 и φ_2 – голдстоуновские бозоны, а $\tilde{\varphi} = \varphi_3$ – хиггсовский бозон – всё получилось как и ранее.

Д/З Сделать такое же исследование для

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi - \lambda(\phi^+\phi - v^2)^2 \quad , \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

и сравнить результат с явным вычислением

§5. Спектр частиц в теориях с локальной калибровочной симметрией (Пример)

Перейдём теперь к исследованию спектра частиц в теориях с локальной калибровочной симметрией. Как и ранее, вначале рассмотрим пример.

$$G = SU(2)\ ,\ \phi_A \in Re\ ,\ A=1,2,3 \quad (\phi_A \in Adj)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu \phi_A)^2 - \frac{\lambda}{2}(\phi_A^2 - v^2)^2$$

$$A = \overline{1, \dim SU(2)} = \overline{1,3}$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi_A = \partial_\mu \phi_A + (\underset{Adj}{A_\mu})_A{}^B \phi_B = \partial_\mu \phi_A + ie A^C_\mu (T^C_{Adj})_A{}^B \phi_B$$

т.к. $(T^C_{Adj})_A{}^B = -if^{CAB} \overset{SU(2)}{=} -i\varepsilon^{CAB}$, то

$$\mathcal{D}_\mu \phi_A = \partial_\mu \phi_A + e\cdot \varepsilon^{CAB} A^C_\mu \phi_B = \partial_\mu \phi_A - e\,\varepsilon^{ABC} A^B_\mu \phi_C$$

Заметим, что если это умножить на iet^A и определить $\phi \equiv iet^A \phi_A$, то

$$\mathcal{D}_\mu \phi \equiv iet^A \mathcal{D}_\mu \phi_A = \partial_\mu \phi - ie^2 f^{ABC} t^A A^B_\mu \phi_C =$$

$$= \partial_\mu \phi + [ieA^B_\mu t^C, ie\phi^C t^C] = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi]$$

– уже знакомая формула для ковариантной производной в присоединённом представлении.

Итак,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^A_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu \phi^A\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\phi_A^2 - v^2\right)^2$$

где $F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - e\varepsilon^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu$

$$\mathcal{D}_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A - e\varepsilon^{ABC} A^B_\mu \phi^C$$

(Существенно, что $G = SU(2)$, все формулы написаны именно для этого случая)

Чтобы исследовать спектр частиц, вначале найдём вакуумное состояние:

Как и ранее, выбираем $\phi^A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$

и ещё $A^A_{\mu 0} = 0$, чтобы не было вкладов от поля Янга-Миллса.

Отклонения ϕ^A и A^A_μ от вакуума малы и $\Rightarrow$ если

$$\phi^A = \phi^A_0 + \varphi^A = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \varphi_3 \end{pmatrix},$$

то φ^A и A^A_μ являются малыми величинами.

Поэтому в квадратичном приближении

$$F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - e\varepsilon^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu$$

можно заменить выражением $\partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu$.

(Линейное слагаемое во второй степени даст члены 2-го порядка малости)

Потенциал мы уже разложили ранее:

$$-\frac{\lambda}{2}\left(\phi_A^2-v^2\right)^2=-\frac{\lambda}{2}\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2+(\varphi_3+v)^2-v^2\right)^2\approx-2\lambda v^2\varphi_3^2 .$$

Остаётся только слагаемое с ковариантными производными:

$$\mathcal{D}_\mu\phi^A=\partial_\mu\phi^A-e\varepsilon^{ABC}A_\mu^B\phi^C=\partial_\mu\varphi^A-e\varepsilon^{ABC}A_\mu^B\left(\phi_0^C+\cancel{\varphi^C}\right)$$

2-й порядок малости

$$\approx\partial_\mu\varphi^A-e\varepsilon^{ABC}A_\mu^B\phi_0^C=$$

$$=\begin{pmatrix}\partial_\mu\varphi_1\\ \partial_\mu\varphi_2\\ \partial_\mu\varphi_3\end{pmatrix}-ev\begin{pmatrix}A_\mu^2\\ -A_\mu^1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_\mu\varphi_1-evA_\mu^2\\ \partial_\mu\varphi_2+evA_\mu^1\\ \partial_\mu\varphi_3\end{pmatrix}$$

Поэтому функция Лагранжа в квадратичном приближении имеет вид

$$\mathcal{L}^{(2)}=-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^A-\partial_\nu A_\mu^A\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_1-evA_\mu^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_2+evA_\mu^1\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_3\right)^2-2\lambda v^2\varphi_3^2 .$$

Перейдём к новым полевым переменным

$$\begin{cases}B_\mu^1\equiv A_\mu^1+\dfrac{1}{ev}\partial_\mu\varphi_2\\ B_\mu^2\equiv A_\mu^2-\dfrac{1}{ev}\partial_\mu\varphi_1\end{cases}$$

– ясно что тогда

$$\partial_\mu A_\nu^{1,2}-\partial_\nu A_\mu^{1,2}=\partial_\mu B_\nu^{1,2}-\partial_\nu B_\mu^{1,2}$$

Поэтому $\mathcal{L}^{(2)}$ перепишется в виде

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu B^1_\nu - \partial_\nu B^1_\mu\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B^2_\nu - \partial_\nu B^2_\mu\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}e^2 \sigma^2 (B^1_\mu)^2 + \frac{1}{2}e^2\sigma^2 (B^2_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_3)^2 - 2\lambda\sigma^2\varphi_3^2$$

$\Longrightarrow$ в теории будут

- 2 массивных векторных поля B^1_μ и B^2_μ с массами $e\sigma$.
- 1 безмассовое векторное поле A^3_μ.
- 1 массивное скалярное поле φ_3 с массой $2\sigma\sqrt{\lambda}$.

По сравнению со случаем нарушения глобальной симметрии теперь нет безмассовых голдстоуновских бозонов φ_1 и φ_2 — их "съели" поля B^1_μ и B^2_μ, приобретя массу.

Отсутствие в спектре частиц голдстоуновских бозонов можно объяснить, переходя к унитарной калибровке.

$$\phi = \phi_0 + \varphi \longrightarrow \omega\phi = e^{\alpha}(\phi_0+\varphi) \approx \phi_0 + \varphi + \alpha\phi_0 .$$

Поэтому при калибровочных преобразованиях в низшем порядке

$$\varphi \to \varphi + \alpha \Phi_0 \qquad \text{где} \quad \alpha \in so(3)$$

$$\varphi_A \to \varphi_A + i\,\alpha^C \underset{Adj}{(T^C)_A{}^B} \Phi_{0B} = \varphi_A + \alpha^C \varepsilon^{CAB} \Phi_{0B} =$$

$$= \varphi_A + \alpha^C \varepsilon^{CA3} v$$

Эквивалентно

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 - v\alpha_2 \\ \varphi_2 + v\alpha_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ можно выбрать α_1 и α_2 т.ч. $\varphi_1' = 0$; $\varphi_2' = 0$

(α_3 остаётся произвольным)

Поэтому существует калибровка, в которой

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \varphi_3 \end{pmatrix}$$

тогда

$$\mathcal{D}_\mu \Phi \approx \begin{pmatrix} -ev A_\mu^2 \\ ev A_\mu^1 \\ \partial_\mu \varphi_3 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A\right)^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 \left((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_3)^2 - 2\lambda v^2 \varphi_3^2$$

— получилось тоже самое, что и ранее, но теперь уже без переопределения полей.

Д/З Исследовать спектр частиц в теории с $G = SU(2)$, $\Phi = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix} \in$ фунд. представлению

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^A_{\mu\nu}\right)^2 + \mathcal{D}_\mu \Phi^+ \mathcal{D}^\mu \Phi - \lambda\left(\Phi^+\Phi - v^2\right)^2$$

§6. Спектр частиц в теориях с локальной калибровочной симметрией (общий случай)

Рассмотрим теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^A_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu \phi_i\right)^2 - V(\phi_i)$$

инвариантную относительно локальных калибровочных преобразований

$$A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}, \quad \omega \in G$$

$$\phi_i \to \omega_i^{\ j} \phi_j \qquad \omega \in Re, \quad \omega^T \omega = 1$$

где $\phi_i \in Re$ преобразуется по некоторому представлению группы G (Для простоты мы пишем $\omega_i^{\ j}$ вместо $T(\omega)_i^{\ j}$).

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = ie F^A_{\mu\nu} t^A$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + (A_\mu)_i^{\ j} \phi_j = \partial_\mu \phi_i + ie A^A_\mu (T^A)_i^{\ j} \phi_j$$

Исследуем в общем случае спектр частиц в такой теории. Для этого вначале находим вакуумное состояние

$$\begin{cases} \phi_{0i} : \ \phi_{0i} \neq \phi_{0i}(x) \ \text{ и } \ V(\phi_{0i}) \to \min \\ A_{\mu 0} = 0 \end{cases}$$

Затем, как и ранее, строим малую группу $H \subset G$, состоящую из всех $\omega \in G$, т.ч. $\phi_0 = \omega \phi_0$.

Затем, как и ранее, делим генераторы на генераторы малой группы и все остальные:

$$T^A = \{T_H^\alpha, T_{G/H}^a\}$$

При этом

$$i T_H^\alpha \phi_0 = 0$$

$$i T_{G/H}^a \phi_0 \equiv E^a$$

и выбираем в пространстве столбцов ОНБ $(e^a, \tilde{e}^{\tilde{a}})$ где $E^a = K^{ab} e^b$.

После этого разложим отклонение скалярного поля от вакуумного состояния по этому базису:

$$\phi_i = \phi_{0i} + e_i^a \varphi^a + \tilde{e}_i^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$$

голдстоуновские поля

хиггсовские поля

Тогда из полученных ранее результатов следует, что

$$V(\phi_i) = \underbrace{\cancel{V(\phi_{0i})}}_{const} + \frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{b}} + \ldots$$

Поскольку $A_{\mu 0} = 0$, то в низшем приближении

$$F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - e f^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu \approx \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu$$

Остаётся только разложить ковариантную производную:

$$\mathcal{D}_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + ie A^A_\mu (T^A)_i{}^j \phi_j \approx e^a_i \partial_\mu \varphi^a + \tilde{e}^{\tilde{a}}_i \partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$$

$$+ \underbrace{\cancel{ie A^\alpha_\mu (T^\alpha_H)_i{}^j \phi_{0j}}}_{0} + ie A^a_\mu (T^a_{G/H})_i{}^j \phi_{0j} =$$

$$= \tilde{e}^{\tilde{a}}_i \partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} + e^a_i \partial_\mu \varphi^a + e \cdot A^a_\mu \cdot \underbrace{E^a_i}_{K^{ab} e^b_i} =$$

$$= \tilde{e}^{\tilde{a}}_i \partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} + e^a_i (\partial_\mu \varphi^a + e K^{ba} A^b_\mu)$$

Поэтому лагранжиан рассматриваемой теории в квадратичном приближении будет записываться в виде

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\underbrace{(\partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu)^2}_{(H)} - \frac{1}{4}\underbrace{(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2}_{(G/H)} +$$

$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^a + e K^{ba} A^b_\mu)^2 - \frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{\varphi}^{\tilde{a}} \tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$$

Определим теперь новые поля

$$B_\mu^a \equiv A_\mu^a + \frac{1}{e}(K^{-1})^{ba}\partial_\mu \varphi^b$$

так что

$$eK^{ba}B_\mu^b = eK^{ba}\left(A_\mu^b + \frac{1}{e}(K^{-1})^{cb}\partial_\mu\varphi^c\right) = eK^{ba}A_\mu^b + \partial_\mu\varphi^a$$

Тогда

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha\right) - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{b}} + \frac{1}{2}e^2K^{ac}B_\mu^a\cdot K^{bc}B_\mu^b$$

Введём обозначение

$$(M^2)^{ab} \equiv e^2K^{ac}K^{bc}$$

Тогда

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a\right)^2 + \frac{1}{2}(M^2)^{ab}B_\mu^a B_\mu^b$$

$$+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\right)^2 - \frac{1}{2}(m^2)^{\tilde{a}\tilde{b}}\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}\tilde{\varphi}^{\tilde{b}}$$

$\Longrightarrow$ в спектре частиц теории будут

1) Безмассовые векторные поля A_μ^α, $\alpha = \overline{1, \dim H}$

2) Массивные векторные поля B_μ^a, $a = \overline{1, \dim G - \dim H}$

3) Массивные хиггсовские бозоны $\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$,

$\tilde{a} = \overline{1, n - \dim G + \dim H}$ где $n = \dim R$.

(R - представление в котором лежит скалярное поле)

Вычислим число степеней свободы:

$$\underbrace{2\cdot\cancel{\dim H}}_{(A_\mu^\alpha)} + \underbrace{3\,(\dim G - \cancel{\dim H})}_{(B_\mu^a)} + \underbrace{(n - \dim G + \cancel{\dim H})}_{(\tilde\varphi^{\tilde a})}$$

$$= 2\dim G + n = 2\dim G + \dim R$$

– видно, что число степеней свободы не зависит от малой группы H.

В спектре частиц отсутствуют голдстоуновские бозоны – их "съели" массивные векторные поля. Это – характерная особенность теорий с локальной калибровочной симметрией.

Голдстоуновские бозоны можно устранить, переходя к унитарной калибровке:

$$\phi_i \longrightarrow \omega_i{}^j\phi_j = (e^\alpha)_i{}^j\phi_j \approx \phi_i + \alpha_i{}^j\phi_{0j} =$$

$$= \phi_{0i} + e_i^a\varphi^a + \tilde e_i^{\tilde a}\tilde\varphi^{\tilde a} + \underbrace{\cancel{i\alpha_H^\alpha (T_H^\alpha)_i{}^j\phi_{0j}}}_{0} + i\alpha_{G/H}^a (T_{G/H}^a)_i{}^j\phi_{0j}$$

$$= \phi_{0i} + e_i^a\varphi^a + \tilde e_i^{\tilde a}\tilde\varphi^{\tilde a} + \alpha_{G/H}^a E_i^a =$$

$$= \phi_{0i} + \tilde e_i^{\tilde a}\tilde\varphi^{\tilde a} + e_i^a\left(\varphi^a + K^{ba}\alpha_{G/H}^b\right)$$

Поэтому можно выбрав $\alpha^a_{G/H}$ добиться, чтобы

$$\varphi'^a = \varphi^a + K^{ba}\alpha^b_{G/H} = 0$$

Другими словами существует унитарная калибровка, в которой

$$\phi_i = \phi_{0i} + \tilde{e}^{\tilde{a}}_i \tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$$

т.е. все голдстоуновские поля равны 0.

При этом α^α_H остались произвольными. Если заглушить все массивные поля

A^a_μ и $\tilde{\varphi}^{\tilde{a}}$ (в унитарной калибровке уже не нужно делать переопределение полей)

то

$$\mathcal{L} \Rightarrow -\frac{1}{4}\left(F^\alpha_{\mu\nu}\right)^2$$

– получится теория Янга-Миллса, инвариантная относитель группы H.

$\Rightarrow$ симметрией низкоэнергетической теории будет малая группа H. Поэтому часто пишут

$$G \longrightarrow H.$$

Применим теперь эти общие результаты к исследованию ранее рассмотренного примера

$G = SU(2)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^A_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\mu \phi^A\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\phi_A^2 - v^2\right)^2 \quad , \text{ где}$$

$$F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - e\,\varepsilon^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi^A = \partial_\mu \phi^A - e\,\varepsilon^{ABC} A^B_\mu \phi^C.$$

тогда

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad A_{\mu 0} = 0 \implies H = SO(2) = U(1)$$

$$T^1_{G/H} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^2_{G/H} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_H = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T^3$$

$$E^1 = i T^1_{G/H} \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E^2 = i T^2_{G/H} \phi_0 = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies K^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

голдстоуновские поле

$$\implies \phi = \phi_0 + e^1 \varphi_1 + e^2 \varphi_2 + \tilde{e}\,\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ v + \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$$

хиггсовское поле

В соответствии с общей теорией в унитарной калибровке

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v+\tilde{\varphi} \end{pmatrix} \text{ — как и ранее}$$

A^3_μ — безмассовое векторное поле

A^1_μ и A^2_μ - массивные векторные поля, причём массовая матрица имеет вид

$$(M^2)^{ab} = e^2 K^{ac} K^{bc} = e^2 \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -v \\ v & 0 \end{pmatrix} = e^2 v^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— получаются в точности такие же массы, как и ранее.

$\tilde{\varphi}$ - массивный хиггсовский бозон как и ранее.

Теперь мы знаем, что такое нарушение симметрии запишется как $SU(2) \to U(1)$

а низкоэнергетической безмассовой теории будет

$$-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu\right)^2 \quad \text{— эл/д без источников.}$$

Д/З Для теории с $G = SU(2)$, $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^A_{\mu\nu}\right)^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^+ \mathcal{D}^\mu \phi - \lambda\left(\phi^+\phi - v^2\right)^2$$

сравнить результаты общего исследования с явными вычислениями.

§1. Уравнение Дирака

Скалярное поле описывают частицы со спином 0. Однако эксперимент говорит о том, что спин электрона равен 1/2. Поэтому его описание является другим.

Попробуем извлечь "квадратный корень" из ур-я КГФ:

$$0 = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi.$$

Ур-е первого порядка можно записать в виде

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

где γ^μ - некоторые коэффициенты.

Умножим его на $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$:

$$0 = (i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = -\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu \psi - m^2 \psi$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu \psi = \frac{1}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu)\partial_\nu \partial_\mu \psi + \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu)\partial_\nu \partial_\mu \psi}}_{0}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = -\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu \partial_\nu \psi - m^2 \psi$$

Чтобы получить ур-е КГФ потребуем, чтобы

$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, т.к. тогда $0 = \partial_\mu \partial^\mu \psi + m^2 \psi$

В качестве γ^μ можно взять матрицы 4×4 (минимальный размер в $D=1+3$)

$$\gamma^0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}}_{4} \Big\updownarrow 4 \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$ – γ-матрицы Дирака

где $1_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, σ^i – матрицы Паули,

$$\sigma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Действительно,

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} = 1_4$$

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} = 0$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} = -2\delta^{ij}\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} = -2\delta^{ij} 1_4$$

поскольку известно, что $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \cdot 1_2$

Поэтому более аккуратно основное соотношение для γ-матриц запишется в виде

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\cdot 1_4}$$

Тогда ур-е Дирака примет вид

$$\boxed{i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0} \quad \text{где} \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \text{ – дираковский спинор}$$

Эквивалентно

$$0 = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m\cdot 1_4)\psi \equiv (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

(1_4 – обычно не пишут)

Важно: компоненты спинора антикоммутируют (в классической теории поля) $\{\psi_a, \psi_b\} = 0$ где $a, b = \overline{1,4}$, т.е. $\psi_a\psi_b + \psi_b\psi_a = 0$.

Построим теперь ур-е, сопряжённое к ур-ю Дирака. Вначале применим операцию эрмитова сопряжения:

$$0 = -i\partial_\mu\psi^+\gamma^{\mu+} - m\psi^+ \quad \Big| \cdot \gamma^0$$

($1 = \gamma^0\gamma^0$)

и умножим результат на $-\gamma^0$ справа:

$$0 = i\partial_\mu\psi^+\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0 + m\psi^+\gamma^0$$

Заметим, что $\boxed{\gamma^0 \gamma^{\mu +} \gamma^0 = \gamma^\mu}$, действительно,

$$\gamma^0 (\gamma^0)^+ \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0$$

$$\gamma^0 (\gamma^i)^+ \gamma^0 = \gamma^0 (-\gamma^i) \gamma^0 = + \gamma^i \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^i$$

Кроме того, определим т.н. дираковски сопряжённый спинор $\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0$. Тогда

$$\boxed{0 = i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi}}$$ – сопряжённое ур-е Дирака.

Уравнение Дирака и сопряжённое к нему ур-е могут быть получены из лагранжиана

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi$$

Действительно, $\varphi_i = (\bar{\psi}, \psi)$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \underbrace{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right)}_{=0} = i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = m \bar{\psi} + i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu$$

(знак из-за антикоммутации)

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = + m \bar{\psi} \; ; \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = - i \bar{\psi} \gamma^\mu \right)$$

Часто также используют эквивалентный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi\right) - m\bar\psi\psi =$$

$$= i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi - \frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi\right] =$$

$$= i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi + \partial_\mu\left[-\frac{i}{2}\bar\psi\gamma^\mu\psi\right]$$

– отличие на 4-х дивергенцию, которая не влияет на уравнения движения.

При комплексном сопряжении по определению полагаем $\quad (\psi_a\psi_b)^* \equiv \psi_b^*\psi_a^*$

Тогда $\mathcal{L}$ оказывается вещественным:

$$(m\bar\psi\psi)^* = (m\psi^+\gamma^0\psi)^+ = m\psi^+\gamma^{0+}\psi = m\psi^+\gamma^0\psi = m\bar\psi\psi$$

$$\left(\frac{i}{2}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right)^* = -\frac{i}{2}\left(\psi^+\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right)^+ = -\frac{i}{2}\partial_\mu\psi^+\underset{\uparrow\ 1=\gamma^0\gamma^0}{}\gamma^{\mu+}\gamma^0\psi$$

$$= -\frac{i}{2}\partial_\mu\bar\psi\,\gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0\psi = -\frac{i}{2}\partial_\mu\bar\psi\,\gamma^\mu\psi$$

и аналогично

$$\left(-\frac{i}{2}\partial_\mu\bar\psi\,\gamma^\mu\psi\right)^* = \frac{i}{2}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

$\Rightarrow \mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ как и должно быть.

§2. Классическая (спинорная) электродинамика

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

инвариантен относительно глобальных калибровочных преобразований группы $U(1)$

$$\psi \to \exp(-ie\alpha)\psi\ ; \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\exp(+ie\alpha)$$

где $\alpha \neq \alpha(x)$ – числовой параметр преобразований, а e – константа связи.

Однако локальной инвариантности нет, т.к. если $\alpha = \alpha(x)$, то

$$\partial_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\left(\exp(-ie\alpha)\psi\right) = \exp(-ie\alpha)\left(\partial_{\mu}\psi - ie\,\partial_{\mu}\alpha\,\psi\right)$$

Для получения теории, инвариантной относительно локальных калибровочных преобразований, в теорию необходимо добавить калибровочное поле A_{μ}, т.ч.

$$A_{\mu} \to A_{\mu} - \partial_{\mu}\alpha$$

при калибровочных преобразованиях и сделать замену

$$\partial_{\mu}\psi \to D_{\mu}\psi \equiv \partial_{\mu}\psi - ieA_{\mu}\psi$$

где $D_{\mu}\psi$ – ковариантная производная.

При этом

$$\mathcal{D}_\mu\psi \to \partial_\mu\left(\exp(-ie\alpha)\psi\right) - ie\left(A_\mu - \partial_\mu\alpha\right)\exp(-ie\alpha)\psi$$

$$= \exp(-ie\alpha)\left[\partial_\mu\psi - ie\cancel{\partial_\mu\alpha\psi} - ieA_\mu\psi + ie\cancel{\partial_\mu\alpha\psi}\right] =$$

$$= \exp(-ie\alpha)\mathcal{D}_\mu\psi$$

Несложно убедиться, что для $\bar{\psi}$

$$\mathcal{D}_\mu\bar{\psi} \equiv (\mathcal{D}_\mu\psi)^+\gamma^0 = \partial_\mu\bar{\psi} + ieA_\mu\bar{\psi} \to \exp(ie\alpha)\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}$$

($\exp(ie\alpha)$ - число)

Поэтому

$$\mathcal{L}_1 = i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

будет инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований группы $U(1)$

$$\psi \to \exp(-ie\alpha)\psi\ ; \quad \bar{\psi} \to \exp(+ie\alpha)\bar{\psi}$$

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha \qquad \text{где} \quad \alpha = \alpha(x) \in Re$$

Также необходим локально калибровочно инвариантный кинетический член для A_μ:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \qquad \text{где} \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

т.ч. суммарно получается лагранжиан классической (спинорной) электродинамики

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi}$$

Уравнения движения получаются стандартным образом:

$$0 = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} \quad \text{где } \varphi_i = (\bar{\psi}, \psi, A_\nu)$$

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\Big(\underbrace{\cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}}}_{0}\Big) = i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\psi$$

– ур-е Дирака при наличии эл./м. поля имеет вид

$$\boxed{i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\psi = 0}$$

где $\mathcal{D}_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi$

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = -i\bar{\psi}\gamma^\mu$$

антикоммутация

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -i\bar{\psi}\gamma^\mu(-ieA_\mu) + m\bar{\psi}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - \bar{\psi}\gamma^\mu eA_\mu + m\bar{\psi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 = i\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi}} \quad \text{где } \mathcal{D}_\mu\bar{\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} + ieA_\mu\bar{\psi}$$

(A_μ – числовая ф-ия)

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(-ie\delta^\nu_\mu)\psi = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\partial_\mu F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \equiv j^\nu}$$ – получается пара ур-й Максвелла с источниками

При этом $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ т.к. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Ток $j^\nu \equiv -e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$ должен удовлетворять закону сохранения

$0 = \partial_\mu j^\mu$, который выполняется вследствие ур-й движения для спинорного поля:

$$0 \overset{?}{=} -\frac{1}{e}\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

При этом

$$0 = i\gamma^\mu(\partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi) - m\psi$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^\mu\partial_\mu\psi = \gamma^\mu \cdot ieA_\mu\psi - im\psi$$

Аналогично

$$0 = i\left(\partial_\mu \bar{\psi} + ie A_\mu \bar{\psi}\right)\gamma^\mu + m\bar{\psi}$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu = -ie A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + im\bar{\psi}$$

Поэтому

$$0 \stackrel{?}{=} -\frac{1}{e}\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi + \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi =$$

$$= \left(\cancel{-ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu} + \cancel{im\bar{\psi}}\right)\psi + \bar{\psi}\left(\cancel{\gamma^\mu ieA_\mu\psi} - \cancel{im\psi}\right) = 0$$

т.о. ток

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

действительно удовлетворяет закону сохранения

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

При этом важно заметить, что при наличии эл./м. поля ур-е Дирака уже не сводится к уравнению Клейна-Гордона-Фока:

$$i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\psi = 0$$

Применим к этому равенству оператор

$$(-i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu - m)$$

Тогда $\quad 0 = (-i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu - m)(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi =$

$$= \left(\gamma^\nu \gamma^\mu D_\nu D_\mu + m^2\right)\psi = \Big(\frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\right) D_\nu D_\mu +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu\right) D_\nu D_\mu + m^2\Big)\psi$$

Определим матрицы

$$\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)$$

Тогда

$$0 = D_\mu D^\mu \psi + \gamma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \psi + m^2\psi = \left(D_\mu^2 + m^2\right)\psi +$$

$$+ \underbrace{\cancel{\gamma^{\mu\nu} \cdot \frac{1}{2}\left(D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu\right)\psi}}_{0} + \gamma^{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu\right)\psi$$

$$= \left(D_\mu^2 + m^2\right)\psi + \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\left[D_\mu, D_\nu\right]\psi$$

При этом

$$\left[D_\mu, D_\nu\right]\psi = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\left(\partial_\nu - ieA_\nu\right)\psi - (\mu \leftrightarrow \nu) =$$

$$= \cancel{\partial_\mu\partial_\nu\psi} - ieA_\mu\partial_\nu\psi - ie\,\partial_\mu(A_\nu\psi) - \cancel{e^2 A_\mu A_\nu\psi} - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

$$= -ie\cancel{A_\mu\partial_\nu\psi} - ie\,\partial_\mu A_\nu \cdot \psi - ie\cancel{A_\nu\partial_\mu\psi} - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

$$= -ie\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\psi = -ieF_{\mu\nu}\psi$$

Поэтому в случае наличия эл/м поля квадрирование уравнения Дирака даёт

$$0 = \left(D_\mu^2 - \frac{ie}{2}F_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + m^2\right)\psi$$

– возникает дополнительное слагаемое по сравнению с ур-ем Клейна-Гордона-Фока.

§3. Нерелятивистский предел уравнения Дирака. Уравнение Паули

Лагранжиан классической (спинорной) электродинамики

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

приводит к уравнению

$$i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\psi = 0$$

– уравнение Дирака с эл/м полем, где

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Важно заметить, что γ-матрицы определены неоднозначно. Если $\gamma^\mu \longrightarrow M\gamma^\mu M^{-1}$, $M^+ = M^{-1}$, то

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \longrightarrow M\gamma^\mu \cancel{M^{-1}}\cdot\cancel{M}\gamma^\nu M^{-1} + M\gamma^\nu \cancel{M^{-1}}\cdot\cancel{M}\gamma^\mu M^{-1} =$$

$$= M\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}M^{-1} = M\cdot 2\eta^{\mu\nu}\cdot 1_4\cdot M^{-1} = 2\eta^{\mu\nu}\cdot 1_4$$

– антикоммутационные соотношения не меняются. Если при этом $\psi \longrightarrow M\psi$, то и уравнение Дирака не поменяется. Следовательно, переход к новому представлению для γ-матриц эквивалентен переопределению ψ.

Часто будет удобно использовать представление для γ-матриц, которое получается при выборе

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$M\gamma^0 M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & -1_2 \\ 1_2 & 1_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} \text{ — новая матрица } \gamma^0$$

$$M\gamma^i M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^i & -\sigma^i \\ -\sigma^i & -\sigma^i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \text{ — новые матрицы } \gamma^i.$$

Если затем ~~определить~~ положить $M\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{34} \end{pmatrix}$, то уравнение Дирака перепишется в виде

$$0 = \left[i\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}(\partial_0 - ie\varphi) + i\begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}(\vec{\nabla} + ie\vec{A}) - m \right]\begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{34} \end{pmatrix}$$

где было учтено, что $A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$. Поэтому

$$\begin{cases} i(\partial_0 - ie\varphi)\psi_{12} - i\vec{\sigma}(\vec{\nabla} + ie\vec{A})\psi_{34} - m\psi_{12} = 0 \\ -i(\partial_0 - ie\varphi)\psi_{34} + i\vec{\sigma}(\vec{\nabla} + ie\vec{A})\psi_{12} - m\psi_{34} = 0 \end{cases}$$

(ψ_{12} и ψ_{34} — двухкомпонентные столбцы)

В квантовой механике ВФ стационарных состояний пропорциональна (111)

$$e^{-iEt} \quad (\hbar = 1).$$

При этом энергия в релятивистском случае может быть представлена как

$E = m + \Delta E \quad (c = 1)$ где ΔE - энергия в нерелятивистском случае.

Поэтому разумно сделать замену

$$\begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{34} \end{pmatrix} \equiv e^{-imt} \begin{pmatrix} \psi'_{12} \\ \psi'_{34} \end{pmatrix} \qquad (\Longleftrightarrow \psi \equiv e^{-imt}\psi')$$

так что для стационарных состояний $\begin{pmatrix} \psi'_{12} \\ \psi'_{34} \end{pmatrix} \sim e^{-i\Delta E t}$.

Тогда
$$\partial_0 \psi = e^{-imt}(\partial_0 \psi' - im\psi')$$
$$\bar{\nabla}\psi = e^{-imt}\bar{\nabla}\psi'$$

и уравнения для ψ_{12} и ψ_{34} перепишутся в виде

$$\begin{cases} i(\partial_0 - \cancel{im} - ie\varphi)\psi'_{12} - i\vec{\sigma}(\bar{\nabla} + ie\bar{A})\psi'_{34} - \cancel{m\psi'_{12}} = 0 \\ -i(\partial_0 - \underline{im} - ie\varphi)\psi'_{34} + i\bar{\sigma}(\bar{\nabla} + ie\bar{A})\psi'_{12} - \underline{m\psi'_{34}} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

В частности, из второго уравнения получаем, что

$$-i\partial_0 \psi'_{34} - e\varphi\psi'_{34} - 2m\psi'_{34} + i\bar{\sigma}(\bar{\nabla} + ie\bar{A})\psi'_{12} = 0$$

В нерелятивистском пределе $\partial_0 \psi'_{34} \sim \Delta E \psi'_{34}$, а

$\Delta E \ll m \quad \left(\Delta E \sim \frac{m v^2}{2}, \text{ а } v \ll 1 = c\right)$

Кроме того будем предполагать, что $|\varphi| \ll m$, что выполняется практически для всех разумных полей.

Тогда

$$-2m\psi'_{34} + i\bar{\sigma}(\bar{\nabla} + ie\bar{A})\psi'_{12} \approx 0$$

$$\Longrightarrow \quad \psi'_{34} \approx \frac{1}{2m}\, i\bar{\sigma}(\bar{\nabla} + ie\bar{A})\psi'_{12}$$

— по модулю компоненты ψ'_{34} оказываются много меньше, чем компоненты ψ'_{12}.

Подставим теперь приближённое выражение для ψ'_{34} в первое уравнение системы (*):

$$i\partial_0\psi'_{12} + e\varphi\psi'_{12} + \frac{1}{2m}\left[\bar{\sigma}(\bar{\nabla} + ie\bar{A})\right]^2\psi'_{12} = 0$$

При этом известно, что

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

Поэтому

$$\left[\bar{\sigma}(\bar{\nabla} + ie\bar{A})\right]^2 = \left(\delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k\right)\left(\partial_i + ie(\bar{A})_i\right)\cdot\left(\partial_j + ie(\bar{A})_j\right) = (\bar{\nabla} + ie\bar{A})^2 + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k\Big(\cancelto{0}{\partial_i\partial_j} + ie\cancel{(\bar{A})_i}\partial_j + ie\left(\partial_i(\bar{A})_j\right) + ie\cancel{(\bar{A})_j}\partial_i - e^2\cancelto{0}{(\bar{A})_i(\bar{A})_j}\Big) =$$

$$= (\bar{\nabla} + ie\bar{A})^2 - e\vec{\sigma}\left[\bar{\nabla}\times\bar{A}\right] = (\bar{\nabla} + ie\bar{A})^2 - e\vec{\sigma}\vec{H}$$

т.к. $\vec{H} = \mathrm{rot}\,\bar{A} = [\bar{\nabla}\times\bar{A}]$

С помощью этого равенства уравнение для ψ'_{12} перепишется в виде

$$i\partial_0\psi'_{12} = -\frac{1}{2m}\left(\bar\nabla + ie\bar A\right)^2\psi'_{12} - e\varphi\psi'_{12} + \frac{e}{2m}\left(\bar\sigma\bar H\right)\psi'_{12}$$

– т. н. уравнение Паули.

Сравним это уравнение с ур-ем Шредингера для заряженной частицы в эл/м поле:

$$\hat H = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec P} - \frac{q}{c}\vec A\right)^2 + q\varphi$$

$$\hat{\vec P} = \frac{\hbar}{i}\bar\nabla$$

$\Longrightarrow$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m}\left(\hbar\bar\nabla - \frac{iq}{c}\bar A\right)^2 + q\varphi\right]\psi$$

$\Longrightarrow$ если $\hbar = c = 1$, $q = -e$, то получаются первые два слагаемых в уравнении Паули.

Последнее слагаемое описывает взаимодействие спина с магнитным полем.

Оператор спина имеет вид $\hat{\vec S} = \frac{\hbar}{2}\vec\sigma$, т.к.

$$\left[\frac{\hbar}{2}\sigma_i, \frac{\hbar}{2}\sigma_j\right] = \frac{\hbar^2}{4}\cdot 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k = i\hbar\varepsilon_{ijk}\cdot\frac{\hbar}{2}\sigma_k$$

и $\Longrightarrow$ $\left[\hat S_i, \hat S_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat S_k$ – правильные коммутационные соотношения для оператора момента импульса.

При этом $\hat{S}_3 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \end{pmatrix}$ (114)

$\Rightarrow |\psi_1|^2$ – плотность вероятности найти частицу в состоянии со спином, направленным вверх, а $|\psi_2|^2$ – в состоянии со спином вниз.

Что можно было бы ожидать из классических соображений? Если частица заряда q находится в постоянном и однородном магнитном поле

$$\vec{H} = \mathcal{H}\vec{e_z}, \quad \text{то} \quad \vec{A} = \left(-\frac{1}{2}\mathcal{H}y,\ \frac{1}{2}\mathcal{H}x,\ 0\right)$$

$$\mathcal{H}\bar{e}_z = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad \vec{L} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

и $\Rightarrow$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - \frac{q}{c}\bar{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{q\mathcal{H}}{2c}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{q\mathcal{H}}{2c}x\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2m}p_z^2 = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + \frac{q\mathcal{H}}{2mc}\underbrace{\left(+p_x y - p_y x\right)}_{-L_z} + \frac{q^2\mathcal{H}^2}{8mc^2}\left(x^2 + y^2\right)$$

Второе слагаемое

$-\frac{q\mathcal{H}}{2mc}L_z = -\frac{q}{2mc}(\vec{H}\vec{L})$ интерпретируется как энергия взаимодействия магнитного момента

$\vec{\mu} = \frac{q\vec{L}}{2mc}$ с магнитным полем:

Поэтому в уравнении Паули было бы естественно ожидать появление слагаемого

$$+\frac{e}{2mc}\frac{\hbar}{2}(\vec{\sigma}\vec{H})\cdot\psi'_{12}\ ,\ \text{т.е.}\ \frac{e}{4m}(\vec{\sigma}\vec{H})\psi'_{12}$$

в случае $\hbar = c = 1$.

Но получается в 2 раза больше:

$$\mu = \frac{e}{2m} = \frac{e}{4m}\cdot g \quad \text{где } g = 2 \text{ в теории Дирака.}$$

На самом деле $\frac{g}{2} = 1{,}00115965\ldots$

Отличие g от 2 объясняется в рамках квантовой теории поля, где величина аномального магнитного момента электрона предсказывается с огромной точностью.

Решая уравнение Дирака в кулоновском поле, удаётся очень хорошо объяснить тонкую структуру водородоподобных атомов:

$$E = m\left(1 + \frac{Z^2\alpha^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}\right)^2}\right)^{-1/2}$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$ $\qquad n = 1, 2, \ldots$

$j = \frac{1}{2}, \ldots, n - \frac{1}{2}$

§ 4. Решение свободного уравнения Дирака

Найдём теперь решение свободного ур-я Дирака

$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ в случае если

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} \; ; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Будем искать решение в виде плоской волны

$\psi = e^{-ik_\mu x^\mu} \cdot A$, где A – четырехкомпонентный столбец, $A \neq A(x)$.

$$\left[i\gamma^\mu (-ik_\mu) - m \right] e^{-ik_\alpha x^\alpha} A = 0$$

$$(\gamma^\mu k_\mu - m) A = 0 \quad , \quad k_\mu = (k_0, -\bar{k})$$

$$\begin{pmatrix} k_0 - m & \bar{\sigma}\bar{k} \\ -\bar{\sigma}\bar{k} & -k_0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{34} \end{pmatrix} = 0$$

Поэтому

$$(\bar{\sigma}\bar{k}) A_{12} + (k_0 + m) A_{34} = 0$$

$$A_{34} = -\frac{(\bar{\sigma}\bar{k})}{k_0 + m} A_{12} .$$

$$0 = (k_0 - m) A_{12} + (\bar{\sigma}\bar{k}) A_{34} = (k_0 - m) A_{12} - \frac{(\bar{\sigma}\bar{k})^2}{k_0 + m} A_{12}$$

$\Rightarrow$ нетривиальное решение $\exists$ если

$$(k_0 - m)(k_0 + m) = (\bar{\sigma}\bar{k})^2 = \bar{k}^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2 \quad \Longrightarrow \quad k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

$$\psi = e^{-ik_\mu x^\mu} \begin{pmatrix} A_{12} \\ -\dfrac{(\vec{\sigma}\vec{k})}{k_0+m} A_{12} \end{pmatrix}$$

Если $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ близко к m, то модули компонент A_{34} много меньше, чем модули компонент A_{12} – как и в предыдущем разделе.

Но если $k_0 = -\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ то при малых $\vec{k}$ $k_0 \approx -m$. тогда

$$A_{12} = -\frac{(\vec{\sigma}\vec{k})}{k_0 - m} A_{34}$$ мало по сравнению с A_{34}.

Чему соответствуют такие отрицательно частотные решения?

§5. Зарядовое сопряжение. Позитрон.

Построим т.н. матрицу зарядового сопряжения C

$C \equiv i\gamma^0\gamma^2$ – произведение симметричных γ-матриц

(В обоих рассматриваемых ранее представлениях

$\gamma^{0T} = \gamma^0$; $\gamma^{1T} = -\gamma^1$; $\gamma^{2T} = \gamma^2$; $\gamma^{3T} = \gamma^3$)

Определённая таким образом матрица C удовлетворяет условию

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T},$$ действительно

$$C\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^2 \cdot \gamma^0 = -\gamma^0 \cdot i\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^0 C$$

$$C\gamma^2 = -\gamma^2 C$$

$$C\gamma^1 = i\gamma^0\gamma^2 \cdot \gamma^1 = \gamma^1 \cdot i\gamma^0\gamma^2 = \gamma^1 C$$

$$C\gamma^3 = \gamma^3 C$$

$$\Rightarrow \quad C\gamma^0 C^{-1} = -\gamma^0 C C^{-1} = -\gamma^0 = -\gamma^{0T}$$

$$C\gamma^1 C^{-1} = +\gamma^1 = -\gamma^{1T}$$

$$C\gamma^2 C^{-1} = -\gamma^2 = -\gamma^{2T}$$

$$C\gamma^3 C^{-1} = +\gamma^3 = -\gamma^{3T}$$

При этом

$$C^{-1} = -C,$$ т.к.

$$C^2 = -\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = (\gamma^0)^2(\gamma^2)^2 = 1\cdot(-1) = -1_4.$$

В явном виде если $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}$; $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$

$$C = i\gamma^0\gamma^2 = i\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Если $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}$; $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, то

$$C = i\gamma^0\gamma^2 = i\begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Определим теперь т.н. зарядово сопряжённый спинор ψ^c с помощью равенства

$$\bar{\psi}^c \equiv \psi^T C$$

Эквивалентно,

$$(\psi^c)^+\gamma^0 = \psi^T C \quad \Big|\gamma^0$$

$$(\psi^c)^+ = \psi^T C\gamma^0$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\psi^c} = (\psi^T C\gamma^0)^+ = \gamma^0 C^+\psi^* = \underline{-\gamma^0 C\psi^*}$$

Предположим, что спинор ψ удовлетворяет уравнению Дирака

$$0 = i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\psi = i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\psi$$

Найдём, какому уравнению удовлетворяет зарядово сопряжённый спинор ψ^c.

Сначала применим к ур-ю Дирака комплексное сопряжение:

$$0 = -i(\gamma^\mu)^*(\partial_\mu\psi^* + ieA_\mu\psi^*) - m\psi^*$$

Затем умножим слева на C:

$$0 = -i\,C(\gamma^\mu)^*\underbrace{C^{-1}C}_{1_4}(\partial_\mu\psi^* + ieA_\mu\psi^*) - mC\psi^*$$

$$0 = i(\gamma^\mu)^+\left(\partial_\mu(C\psi^*) + ieA_\mu(C\psi^*)\right) - m(C\psi^*)$$

Затем умножаем слева на γ^0:

$$0 = i\gamma^0(\gamma^\mu)^+\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{1_4}\left(\partial_\mu(C\psi^*) + ieA_\mu(C\psi^*)\right) - m\gamma^0 C\psi^*$$

$$0 = i\gamma^\mu\left[\partial_\mu(\gamma^0 C\psi^*) + ieA_\mu(\gamma^0 C\psi^*)\right] - m(\gamma^0 C\psi^*)$$

$$\Longrightarrow \boxed{0 = i\gamma^\mu\left[\partial_\mu\psi^c + ieA_\mu\psi^c\right] - m\psi^c}$$

- Спинор ψ^c удовлетворяет уравнению Дирака с противоположным знаком заряда.

При этом если $k_0 < 0$, т.е. $\psi \sim e^{+i|k_0|t}$, то $\psi^c \sim e^{-i|k_0|t}$, т.к. $\psi^c \sim \psi^*$.

Если $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}$ $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, то

$$\psi^c = -\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \\ \psi_3^* \\ \psi_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_4^* \\ -\psi_3^* \\ -\psi_2^* \\ \psi_1^* \end{pmatrix}$$

- Верхние и нижние компоненты меняются местами

Поэтому для отрицательночастотных решений ВФ строится на основе ψ^c. Они описывают распространение частицы заряда $q = +e$ - позитрона.

При этом большими будут уже компоненты ψ_3 и ψ_4 (а не ψ_1 и ψ_2 как для электрона)

§6. Спиноры и преобразования Лоренца

Будет ли

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

инвариантен относительно преобразований группы Лоренца?

γ^μ – постоянные матрицы, но есть векторный индекс. Как быть? Ответ – нужно нетривиальным образом преобразовать спинор ψ.

В фундаментальном представлении генераторы группы Лоренца имеют вид

$$(t^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \frac{i}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\eta^{\nu\beta} - \delta^\nu_\alpha\eta^{\mu\beta}\right)$$

так что

$$-i\alpha_{\mu\nu}(t^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha_\alpha{}^\beta - \alpha^\beta{}_\alpha\right) = \alpha_\alpha{}^\beta.$$

Найдём коммутационные соотношения для этих генераторов:

$$[t^{\mu\nu}, t^{\alpha\beta}]_\gamma{}^\delta = (t^{\mu\nu})_\gamma{}^\sigma(t^{\alpha\beta})_\sigma{}^\delta - (t^{\alpha\beta})_\gamma{}^\sigma(t^{\mu\nu})_\sigma{}^\delta =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\underset{1}{\delta^\mu_\gamma}\eta^{\nu\sigma} - \delta^\nu_\gamma\underset{2}{\eta^{\mu\sigma}}\right)\left(\underset{1}{\delta^\alpha_\sigma}\eta^{\beta\delta} - \delta^\beta_\sigma\underset{2}{\eta^{\alpha\delta}}\right) - \begin{pmatrix}\mu\leftrightarrow\alpha\\ \nu\leftrightarrow\beta\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\Big[\delta^\mu_\gamma\,\underset{11}{\eta^{\nu\alpha}\eta^{\beta\delta}} - \delta^\mu_\gamma\,\underset{12}{\eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\delta}} - \delta^\nu_\gamma\,\underset{21}{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\delta}} + \delta^\nu_\gamma\,\underset{22}{\eta^{\mu\beta}\eta^{\alpha\delta}}$$

$$- \delta^\alpha_\gamma\eta^{\beta\mu}\eta^{\nu\delta} + \delta^\alpha_\gamma\eta^{\beta\nu}\eta^{\mu\delta} + \delta^\beta_\gamma\eta^{\alpha\mu}\eta^{\nu\delta} - \delta^\beta_\gamma\eta^{\alpha\nu}\eta^{\mu\delta}\Big] =$$

$$= \frac{i}{2}\left[-\eta^{\mu\alpha}(t^{\nu\beta})_\gamma{}^\delta + \eta^{\nu\alpha}(t^{\mu\beta})_\gamma{}^\delta + \eta^{\mu\beta}(t^{\nu\alpha})_\gamma{}^\delta - \eta^{\nu\beta}(t^{\mu\alpha})_\gamma{}^\delta\right]$$

Поэтому

$$\boxed{[t^{\mu\nu}, t^{\alpha\beta}] = \frac{i}{2}\left(-\eta^{\mu\alpha}t^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}t^{\mu\beta} + \eta^{\mu\beta}t^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\beta}t^{\mu\alpha}\right)}$$

Рассмотрим теперь величины

$$\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = \gamma^\mu\gamma^\nu - \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \gamma^\mu\gamma^\nu - \eta^{\mu\nu}\,1_4$$

Тогда

$$[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha\beta}] = [\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\alpha\gamma^\beta] = \gamma^\mu[\gamma^\nu, \gamma^\alpha\gamma^\beta] + [\gamma^\mu, \gamma^\alpha\gamma^\beta]\gamma^\nu$$

$$= \gamma^\mu\left(\{\gamma^\nu, \gamma^\alpha\}\gamma^\beta - \gamma^\alpha\{\gamma^\nu, \gamma^\beta\}\right) + \left(\{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\}\gamma^\beta - \gamma^\alpha\{\gamma^\mu, \gamma^\beta\}\right)\gamma^\nu$$

$$= 2\eta^{\nu\alpha}(\gamma^{\mu\beta} + \cancel{\eta^{\mu\beta}}) - 2\eta^{\nu\beta}(\gamma^{\mu\alpha} + \cancel{\eta^{\mu\alpha}}) + 2\eta^{\mu\alpha}(\gamma^{\beta\nu} + \cancel{\eta^{\beta\nu}})$$

$$- 2\eta^{\mu\beta}(\gamma^{\alpha\nu} + \cancel{\eta^{\alpha\nu}}) = 2\left(-\eta^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\gamma^{\mu\beta} + \eta^{\mu\beta}\gamma^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\beta}\gamma^{\mu\alpha}\right)$$

$\Rightarrow$

если определить величины

$T^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}\gamma^{\mu\nu}$, то

$$[T^{\mu\nu}, T^{\alpha\beta}] = \frac{i}{2}\left(-\eta^{\mu\alpha}T^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}T^{\mu\beta} + \eta^{\mu\beta}T^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\beta}T^{\mu\alpha}\right)$$

– те же КС, что и для фундаментального представления.

$\Rightarrow$ Если в фундаментальном представлении

$$\alpha_\alpha{}^\beta = -i\alpha_{\mu\nu}(t^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \quad , \text{ то}$$

в спинорном представлении

$$\alpha = -i\alpha_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ Если в фундаментальном представлении

$$\omega_\alpha{}^\beta = \exp(\alpha)_\alpha{}^\beta \in \text{ группе Лоренца,}$$

то в спинорном представлении

$$T(\omega) = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right) \qquad (4\times 4 \text{ матрица})$$

и под действием преобразований Лоренца

$$\psi \to \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi$$

Тогда дираковски сопряжённый спинор будет преобразовываться по закону

$$\bar\psi = \psi^+\gamma^0 \to \psi^+\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{1}\exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^+\right)\gamma^0$$

При этом

$$\gamma^0(\gamma^{\mu\nu})^+\gamma^0 = \frac{1}{2}\gamma^0(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^+\gamma^0 =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^0(\gamma^\nu)^+\gamma^0\gamma^0(\gamma^\mu)^+\gamma^0 - (\mu\leftrightarrow\nu) = \frac{1}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu)$$

$$= -\gamma^{\mu\nu}$$

Поэтому

$$\bar\psi \longrightarrow \bar\psi \exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)$$

Поэтому

$$\bar\psi\psi \to \bar\psi \exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\cdot \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi = \bar\psi\psi = inv$$

– скалярная величина.

$$\bar\psi\gamma^\mu\psi \to \bar\psi \exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\psi$$

Воспользуемся формулой

$$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!}[A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \dots,$$

учитывая что

$$\left[-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu\right] = -\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\left[\gamma^\alpha\gamma^\beta, \gamma^\mu\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\left(\gamma^\alpha\{\gamma^\beta,\gamma^\mu\} - \{\gamma^\alpha,\gamma^\mu\}\gamma^\beta\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\left(2\eta^{\beta\mu}\gamma^\alpha - 2\eta^{\alpha\mu}\gamma^\beta\right) = \alpha^\mu_{\cdot\,\nu}\gamma^\nu$$

С помощью этого равенства получим

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right) = \gamma^\mu + \frac{1}{1!}\alpha^\mu_{\cdot\,\nu}\alpha^\nu + \qquad (*)$$

$$+ \frac{1}{2!}\alpha^\mu_{\cdot\,\nu}\alpha^\nu_{\cdot\,\sigma}\gamma^\sigma + \dots = \exp(\alpha)^\mu_{\cdot\,\nu}\gamma^\nu = \exp(-\alpha)_\nu^{\ \mu}\gamma^\nu$$

$$\Rightarrow \bar\psi\gamma^\mu\psi \to \exp(-\alpha)_\nu^{\ \mu}\cdot\bar\psi\gamma^\nu\psi$$

– получился вектор.

$\Rightarrow$ Величины $\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$ и $\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi$ будут скалярами. Поэтому лагранжиан электродинамики будет лоренц-инвариантным.

(Конечно, речь шла о преобразованиях из связной группы Лоренца. Также можно изучать законы преобразования спиноров при P и T преобразованиях)

γ-матрицы являются инвариантным тензором по отношению к преобразованиям Лоренца, если принять во внимание матричные индексы:

$$\psi_a \to \exp\left(\tfrac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)_a{}^b \psi_b$$

$$\bar{\psi}^a \to \bar{\psi}^b \exp\left(-\tfrac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)_b{}^a$$

$$(\gamma^\mu)_a{}^b \longrightarrow \exp(\alpha)^\mu{}_\nu \exp\left(\tfrac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)_a{}^c (\gamma^\nu)_c{}^d \exp\left(-\tfrac{1}{4}\alpha_{\gamma\delta}\right.$$
$$\left.\cdot\gamma^{\gamma\delta}\right)_d{}^b = (\gamma^\mu)_a{}^b$$

формула (*) после замены $\alpha \to -\alpha$

Д/З Доказать, что при преобразованиях группы Лоренца зарядово сопряжённый спинор ψ^c преобразуется также как и исходный спинор ψ

§7. Майорановские и вейлевские спиноры

Представление группы Лоренца дираковскими спинорами является приводимым. Это позволяет накладывать лоренц-инвариантные связи на компоненты спиноров. Например, условие

$$\boxed{\psi^c = \psi} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi^T C = \bar{\psi} \qquad (\bar{\psi}^c \equiv \psi^T C)$$

определяет т.н. майорановский спинор.

Если $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}$ $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, то $C = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

и $\Rightarrow$

$$\psi^T C = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = (\psi_2, -\psi_1, -\psi_4, \psi_3)$$

С другой стороны,

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\psi_3^*, \psi_4^*, \psi_1^*, \psi_2^*)$$

$\Rightarrow$ из условия $\bar{\psi} = \psi^T C$ получаем равенства

$$\psi_2 = \psi_3^* \ ; -\psi_1 = \psi_4^* \ ; \cancel{-\psi_4 = \psi_1^*} \ ; \quad \cancel{\psi_3 = \psi_2^*}$$

эквивалентны предыдущим

Поэтому майорановский спинор запишется в виде

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

— только ψ_1 и ψ_2 независимы.
(Условие майорановости является аналогом условия вещественности для скалярного поля)

Для того, чтобы построить вейлевские (или же киральные) спиноры, определим матрицу

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

Если $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}$; $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, то

$$\gamma_5 = i\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$= i\begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$$

При этом

$$(\gamma_5)^2 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \cdot i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 =$$

$$= +\gamma^1\gamma^2\gamma^3\cdot\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = +1_4.$$

Кроме того

$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad \forall\, \mu$, т.к., например,

$$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\cdot\gamma^2 = -\gamma^2\cdot i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

"−" "−" "+" "−"

($\forall\, \mu$ будет 3 антикоммутации и 1 коммутация)

По определению, вейлевские спиноры являются собственными векторами матрицы γ_5:

$$\gamma_5\psi = \lambda\psi$$

$\Rightarrow \quad \psi = (\gamma_5)^2\psi = \gamma_5 \lambda \psi = \lambda^2 \psi$, так что

$\lambda^2 = 1$ и $\Rightarrow \lambda = \pm 1$.

По определению, $\psi_R = \gamma_5 \psi_R$ - правый спинор

$\psi_L = -\gamma_5 \psi_L$ - левый спинор.

т.к. $\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$, то

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_R = 0$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_L = 0$$

т.к. $(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = 1_4 - (\gamma_5)^2 = 0$.

Эти условия лоренц-инвариантны, поскольку если $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_R = 0$, то

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_R' = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\psi_R =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)\cdot \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_R = 0$$

Легко построить взаимно однозначное соответствие между майорановскими спинорами и спинорами определённой киральности, например,

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} \longrightarrow \psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \psi_M = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

Лагранжиан спинорной электродинамики можно записать в терминах вейлевских спиноров как

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L - m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$$

Действительно,

$$\bar{\psi}_R = \left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi\right]^+\gamma^0 = \psi^+\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^0 = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$$

$$\bar{\psi}_L = (\text{аналогично}) = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

Поэтому

$$\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1+\gamma_5)D_\mu\psi = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\psi$$

т.к. $\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(1-2\gamma_5+(\gamma_5)^2\right) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$

Аналогично

$$\bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu D_\mu\psi$$

Поэтому

$$\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L = \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi$$

$$\bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\cdot\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$$

$$\bar{\psi}_L\psi_R = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$$

$$\Longrightarrow\quad \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R = \bar{\psi}\psi$$

Именно указанная выше форма лагранжиана эл/д получается как низкоэнергетический предел Стандартной модели.

§ 8. Киральные преобразования. Понятие об аномалиях

В безмассовом случае ($m=0$) лагранжиан эл/д инвариантен относительно т.н. киральных преобразований

$\psi \to \exp(i\gamma_5\alpha)\psi$ где $\alpha \neq \alpha(x)$ – Re число.

Тогда

$$\bar\psi = \psi^+\gamma^0 \longrightarrow \psi^+\exp(-i\gamma_5\alpha)\gamma^0 = \psi^+\gamma^0\exp(i\gamma_5\alpha) = \bar\psi\exp(+i\gamma_5\alpha)$$

т.к.

$$\exp(-i\gamma_5\alpha)\gamma^0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i\gamma_5\alpha)^n\gamma^0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\gamma^0(i\gamma_5\alpha)^n =$$

$$= \gamma^0\exp(i\gamma_5\alpha)$$

Поэтому

$$\bar\psi\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi \to \bar\psi\exp(i\gamma_5\alpha)\gamma^\mu\exp(i\gamma_5\alpha)\mathcal{D}_\mu\psi =$$

$$= \bar\psi\gamma^\mu\cancel{\exp(-i\gamma_5\alpha)}\cancel{\exp(i\gamma_5\alpha)}\mathcal{D}_\mu\psi = \bar\psi\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi = \text{inv}$$

Однако

$$\bar\psi\psi \to \bar\psi\exp(2i\alpha\gamma_5)\psi \neq \text{inv}$$

$\Longrightarrow$
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar\psi\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar\psi\psi$$

инвариантен относительно киральных преобразований в безмассовом случае $m=0$.

Д/З Доказать, что соответствующий сохраняющийся ток имеет вид $j_5^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi$

Действительно,

$$\partial_\mu j_5^\mu = \partial_\mu \bar\psi \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \bar\psi \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi$$

тогда как

$$\begin{cases} 0 = i\gamma^\mu(\partial_\mu \psi - ieA_\mu \psi) - m\psi \\ 0 = i(\partial_\mu \bar\psi + ieA_\mu \bar\psi)\gamma^\mu + m\bar\psi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma^\mu \partial_\mu \psi = ieA_\mu \gamma^\mu \psi - im\psi$$

$$\partial_\mu \bar\psi \gamma^\mu = -ieA_\mu \bar\psi \gamma^\mu + im\bar\psi$$

Подставляя эти величины, получаем, что

$$\partial_\mu j_5^\mu = \left(\cancel{-ieA_\mu \bar\psi \gamma^\mu} + im\bar\psi\right)\gamma_5\psi - \bar\psi\gamma_5\left(\cancel{ieA_\mu\gamma^\mu\psi} - im\psi\right)$$

$$= 2im\bar\psi\gamma_5\psi$$

– в случае $m = 0$ получается закон сохранения кирального тока

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0.$$

В квантовой теории закон сохранения кирального тока нарушается квантовыми поправками:

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar\psi\gamma_5\psi + \frac{e^2}{8\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu}$$

аномалия.

где $\tilde F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$