Лекция 31.10.11. Стационарное изэнтропийное течение газа.

Рассмотрим примеры, когда объемные деформации среды существенны. Будем называть такую сплошную среду газом. Для упрощения модели будем считать, что рассматриваемый газ является идеальным, термическое уравнение состояния которого – уравнение Клапейрона – Менделеева, в переменных сплошной среды имеет вид:

$$p = r\rho T,$$

где $\rho = m/V$ - плотность газа, а $r = R/\mu$.

В общем случае $p = p(\rho, T)$, но для баротропных процессов оно упрощается $p = p(\rho)$.

Рассмотрим в качестве примера *стационарное течение* газа по трубе переменного сечения, площадь поперечного сечения которой задана как функция координаты $S = S(x)$. Если изменение площади происходит достаточно медленно, то поток газа является одномерным, т. е. его механические и термодинамические характеристики также являются функциями только одной координаты: $p = p(x)$, $\rho = \rho(x)$, $T = T(x)$, $u = u(x)$.

Выбранная модель максимально упрощает рассмотрение течения, но выполнение условия непрерывности возможно только в интегральном виде

$$\rho u S = const.$$

С такой же точностью запишем уравнение Эйлера для стационарного течения $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, учтывая лишь проекцию скорости на направление вдоль оси трубы

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}.$$

Для баротропного течения положим $p(\rho) = C\rho^n$. В этом случае, с учетом уравнения состояния $p(\rho) = r\rho T(\rho)$, $T(\rho) = \frac{C}{r}\rho^{n-1}$.

Тогда правая часть уравнения Эйлера может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} = nC\rho^{n-2}\frac{d\rho}{dx},$$

а производная от температуры, $\frac{dT}{dx} = (n-1)\frac{C}{r}\rho^{n-2}\frac{d\rho}{dx}$ т.е. $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = r\frac{n}{n-1}\frac{dT}{dx}$.

Для адиабатического процесса $n = c_p/c_v = \gamma$. Учитывая соотношение Майера $c_p - c_v = r$, получим $r\frac{n}{n-1} = r\frac{c_p}{c_p - c_v} = c_p$, так что $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = r\frac{n}{n-1}\frac{dT}{dx} = c_p\frac{dT}{dx}$.

Этот результат в общем виде можно получить, обратившись к первому началу термодинамики:

$$\delta q = de - \frac{p}{\rho^2}d\rho = 0.$$

Вводя энтальпию $w = e + p/\rho$, получим $dw = de + \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2}d\rho$, так что для адиабатического процесса $de - \frac{p}{\rho^2}d\rho = dw - \frac{dp}{\rho} = 0$.

Уравнение Эйлера $u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$ в этом случае можно записать в виде $\frac{d}{dx}\frac{u^2}{2} = -\frac{dw}{dx}$, и проинтегрировать его, получив интеграл Бернулли

$$\frac{u^2}{2} + w = const.$$

Для идеального газа $p(\rho) = r\rho T$ энтальпия легко вычисляется:

$$w = e + p/\rho = (c_v + r)T = c_p T,$$

что дает интеграл уравнения Эйлера в удобном виде:

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = const. \qquad (4)$$

Из соотношения (4) следует, что температура в адиабатическом потоке газа уменьшается с ростом его скорости. В частности, если в некотором сечении трубы S_0, где скорость идеального газа пренебрежимо мала, температура равна T_0, то $T(u) = T_0 - u^2/2c_p$. Максимально возможная скорость течения газа по трубе в этом случае определяется сечением, где температура газа равна нулю

$$u_{\max} = \sqrt{2c_p T_0}.$$

Уравнение Эйлера и уравнение непрерывности позволяют определить зависимость скорости течения от площади поперечного сечения.

Преобразуем правую часть уравнения Эйлера:

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s \frac{d\rho}{dx} = c^2\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right),$$

где введено обозначение $c(x) = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$. Эта величина имеет размерность скорости, и является скоростью звука в газе в данном сечении.

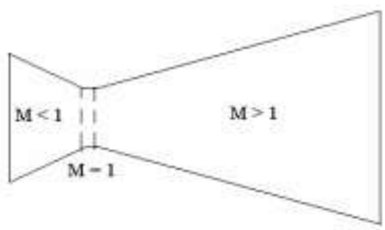
Отсюда получаем уравнение *Гюгонио́*, связывающее скорость потока и сечение трубы:

$$\left(u^2 - c^2\right)\frac{du}{dx} = \frac{u}{S}\frac{dS}{dx},$$

из которого следует, что при $u < c$ $\frac{du}{dS}$ и $\frac{dS}{dx}$ имеют разные знаки, а при $u > c$ знаки этих производных совпадают. То есть, при скорости потока в рассматриваемом сечении, меньшем локальной скорости звука $c = c(S)$, уменьшение сечения трубы приводит к росту скорости потока, а при скорости, большей скорости звука – наоборот.

Сечение трубы, в котором скорость потока равна местной скорости звука $u_* = c_*$, называется критическим.

Полученные результаты имеют большое прикладное значение для создания систем ускоряющих поток газа. При необходимости разогнать газ до большой скорости, превышающей скорость звука, сечение трубы должно вначале уменьшаться до критического, в котором скорость потока достигает местной скорости звука, а затем увеличиваться. Труба такого сечения называется соплом Лаваля, применившего ее в первой паровой турбине.



Для адиабаты Пуассона $p(\rho) = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$ скорость звука выражается через температуру газа:

$$c^2 = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma r T,$$

что позволяет выразить внутреннюю энергию и энтальпию скорость звука:

$$e = c_V T = \frac{1}{\gamma}\frac{c^2}{\gamma - 1}, \qquad w = c_p T = \frac{c^2}{\gamma - 1}.$$

Если скорость звука в покоящемся газе при температуре T_0 равна c_0 ($c_0^2 = \gamma r T_0$), а в сечении потока с температурой T равна $c^2(S)=\gamma r T(S)$ то уравнение Бернулли

$$c_p T_0 = \frac{u^2}{2} + c_p T$$

определяет зависимость температуры от скорости потока

$$T(u) = T_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c_0^2}\right).$$

и скорость течения газа в критическом сечении, где $c_* = u$

$$c_* = c_0\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

Уравнение состояния и адиабата Пуассона позволяют вычислить зависимость от скорости плотности и давления идеального газа.

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c_0^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad p = p_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c_0^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

и значения критических параметров потока:

$$T_* = T_0\frac{2}{\gamma+1}, \qquad p_* = p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_* = \rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Разрывное течение газа

Как и течение жидкости, течение газа может быть разрывным, когда его характеристики (плотность, скорость, давление) являются разрывными функциями.

Но в отличие от несжимаемой жидкости, в газе возможны не только тангенциальные разрывы вдоль линии тока, но и нормальные скачки плотности, скорости и температуры при переходе через поверхность, нормальную к скорсоти потока. Такой разрыв сопровождается переносом вещества через поверхность разрыва. Разрывы называются ударными волнами, и мы рассмотрим сейчас простейшую модель этого явления.

Предположим, что движение происходит по трубе постоянного сечения вдоль оси Ox так, что при $x=0$ имеется скачок характеристик.

Для описания разрывного течения уравнения движения в дифференциальной форме непригодны, поэтому мы будем использовать интегральные соотношения.

Закон сохранения массы в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(x_k)dv = -\oint_S \rho u_i d\sigma_i$$

применительно к стационарному течению по трубе постоянного сечения дает уравнение

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2.$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены параметры газа до и после скачка в сечении $x=0$.

Импульс газа в выделенном контрольном объеме изменяется за счет переноса импульса через контрольную поверхность и под действием поверхностных сил:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(x_k)u_i dv = -\oint_S \rho u_i u_k d\sigma_k + \oint_S \tau_{ik} d\sigma_k,$$

что приводит к уравнению

$$\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2.$$

Однако соотношение между плотностью давлением, даваемое адиабатой Пуассона, которое мы использовали для анализа непрерывного течения газа, теперь не имеет места. Дело в том, что термодинамические характеристики газа введены только для равновесной системы, когда любой элементарный объем находится в состоянии термодинамического равновесия. Но при переходе поверхности разрыва это условие нарушается, и течение газа при прохождении через поверхность сопровождается ростом энтропии.

Для установления связи между давлением и плотностью воспользуемся законом сохранения энергии, учитывая, что внутренняя энергия включает лишь среднюю энергию хаотического движения

$$\delta q = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho .$$

В потоке газ обладает еще и кинетической энергией упорядоченного движения, которую следует включить в рассмотрение наряду с внутренней энергией. Это удобно сделать при помощи теоремы Кенига, сведя энергию движущихся молекул к сумме энергии движения «центра масс» и энергии хаотического движения относительно центра масс, т. е. внутренней энергии (после усреднения).

При адиабатическом процессе изменение полной энергии в выделенном объеме происходит за счет переноса энергии потоком через границу объема и за счет работы сил давления, действующих на границе, что приводит к уравнению

$$\rho_2 u_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) - \rho_1 u_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) = p_1 u_1 - p_2 u_2 .$$

С учетом с уравнения непрерывности оно приводит к уравнению Бернулли, в которое входит энтальпия системы $w = e + p/\rho$:

$$w_2 + \frac{u_2^2}{2} = w_1 + \frac{u_1^2}{2} .$$

Вместе с уравнениями состояния идеального газа (Клапейрона-Менделеева) $p = (\gamma - 1)\rho e$ и $e = c_V T$ система является полной системой уравнений, описывающей разрывное течение газа.

Ударная адиабата.

Исключая скорости потока, можно получить соотношение, связывающее плотность и давление газа по обе стороны от разрыва:

$$e_1 - e_2 + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(p_1 + p_2)}{2\rho_1 \rho_2} = 0$$

В последнем соотношении не использованы предположения о термодинамических характеристиках газа (его идеальности) и оно позволяет определить давление газа после прохождения разрыва как функцию его плотности. Такая зависимость называется ударной адиабатой или адиабатой Гюгонио́. В отличие от рассматривавшейся ранее адиабаты Пуассона $p_2 = p_1 (\rho_2/\rho_1)^\gamma$, давление в ударной адиабате зависит не только от плотности газа после разрыва, но и от начальных характеристик p_1 и ρ_1. Для модели идеального газа эта зависимость имеет вид:

$$p_2 = p_1 \frac{(\gamma + 1)z - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)z},$$

где $z = \rho_2/\rho_1$ – отношение плотностей газа. На рисунке изображены адиабата Пуассона и Гюгонио́.

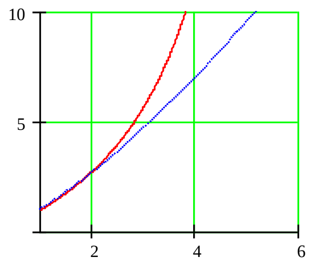


Рис. Адиабата Пуассона (пунктир) и Гюгонио (сплошная)

При заданном начальном состоянии газа перед скачком задание лишь одного параметра после скачка, например ρ_2, определяет давление газа, а следовательно, и всех остальных его параметров. Очевидно, что плотность газа не может быть сколь угодно большой. Максимальное значение плотности $\rho_{\max} = \rho_1 \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}$. Для идеального одноатомного газа $\gamma = c_p / c_V = 5/3$, так что $z_{\max} = 4$, а для воздуха $z_{\max} = 6$.

Отношение температур до и после разрыва $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{p_2}{p_1}\dfrac{1}{z}$.

Прохождение газом поверхности разрыва является неравновесным процессом, сопровождающимся ростом энтропии. Для идеального газа

$$s = c_V \ln\left(p/\rho^\gamma\right).$$

Подставляя сюда значения давления, получим изменение энтропии как функцию скачка плотности:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_V \ln\left(\frac{(\gamma+1)z-(\gamma-1)}{(\gamma+1)-(\gamma-1)z}\cdot\frac{1}{z^\gamma}\right).$$

Рост энтропии в системе возможен лишь при условии $z = \rho_2/\rho_1 > 1$, когда $u_2 < u_1$, т. е. при торможении газа в ударной волне. Это условие определяет направление процессов при разрывном течении газа. Скорости потока до и после разрыва выражаются через соответствующие скорости звука и скачок плотности:

$$u_1 = c_1 \frac{\sqrt{2z}}{\sqrt{(\gamma+1)-(\gamma-1)z}}, \qquad u_2 = c_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\gamma+1)z-(\gamma-1)}},$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ и $c_2 = \sqrt{\gamma p_2/\rho_2}$ – скорости звука в потоке слева и справа от разрыва.

Как следует из приведенных соотношений $u_1 > c_1$, а $u_2 < c_2$, причем $u_2 = u_1/x < u_1$.

Поток газа, втекающий в разрыв, имеет сверхзвуковую скорость, а поток затормозившегося газа – дозвуковую.

Уравнение Прандтля

Одномерное течение газа по трубе описывается уравнениями непрерывности, изменения импульса и энергии. Для описания течения по трубе постоянного сечения удобен интегальный вид этих уравнений, где A, B, C – константы:

$$\rho v = A, \qquad \rho v^2 + p = B, \qquad \frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} = C.$$

Решая эту систему, можно найти скорость течения газа при заданных параметрах в выбранном сечении. Исключая плотность с помощью первого уравнения, и учитывая, что для идеального газа $\dfrac{p}{\rho} = rT = \dfrac{c_p - c_V}{c_V} c_V T = (\gamma-1)\varepsilon$, получим систему

$$v + (\gamma-1)\frac{\varepsilon}{v} = \frac{B}{A} \qquad \frac{v^2}{2} + \gamma\varepsilon = C,$$

решение которой приводит к уравнению для скорости

$$v^2 - 2\frac{B}{A}\frac{\gamma}{\gamma+1}v + 2C\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = 0.$$

Два решения этого уравнения $v_{1,2}$ удовлетворяют условию $v_1 v_2 = 2C\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

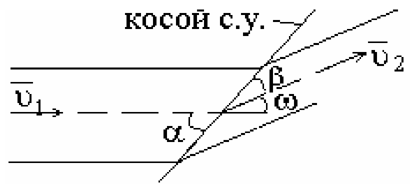
Значение константы C выражается через скорость в критическом сечении $v_* = c_* = \sqrt{\gamma\dfrac{p_*}{\rho_*}}$, которая равна локальной скорости звука:

$$C=\frac{c_*^2}{2}+\gamma\varepsilon_*=\frac{c_*^2}{2}+\frac{c_*^2}{\gamma-1}=\frac{c_*^2}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}.$$

Отсюда получается уравнение Прандтля $v_1 v_2=c_*^2$, связывающее скорости течения в двух выбранных сечениях трубы. Если сверхзвуковое течение $v_1>c_*$ сопровождается скачком параметров, то скорость течения после скачка оказывается дозвуковой $v_2=c_*^2/v_1<c_*$.

Величина скачка определятся условием $v_1-v_2=\left\{\left(\frac{B}{A}\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^2-c_*^2\right\}^{1/2}$. Отношение констант B/A должно быть достаточно большим $B/A>(1++1/\gamma)c_*$, чтобы скачок существовал.

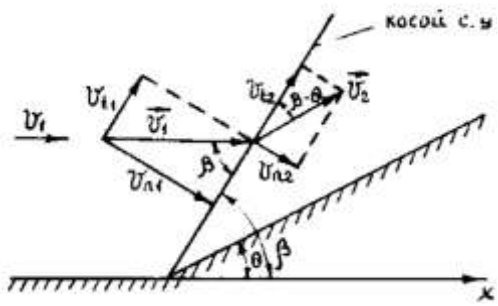
Косой скачок уплотнения



Характерной особенностью прямого скачка уплотнения является то, что, пересекая его фронт, газовый поток не меняет своего направления, причем фронт прямого скачка располагается нормально к направлению потока. Помимо прямых скачков уплотнения существуют и так называемые косые скачки уплотнения. Фронт косого скачка располагается наклонно к направлению потока (рис.), т.е. угол между вектором скорости потока и плоскостью скачка отличен от 90°. Таким образом, косым скачком уплотнения называют неподвижную ударную волну, плоскость которой расположена под определенным углом (не равным 90°) к направлению потока.

Косой скачок уплотнения получается в том случае, когда, пересекая фронт скачка, газовый поток изменяет свое направление. Например, при сверхзвуковом обтекании клиновидного тела, которое отклоняет поток от начального направления на угол ω, перед телом образуются плоские, косые скачки уплотнения, сходящиеся на его носике. Косой скачок уплотнения образуется и при обтекании конуса. Если до встречи потока с фронтом косого скачка вектор скорости υ_1 составлял с ним угол α, то после пересечения фронта поток отклоняется наугол ω, а угол между вектором скорости υ_2 и фронтом косого скачка уплотнения равен β=α-ω.

Элементарную теорию косого скачка уплотнения можно рассматривать на примере течения газового потока внутри тупого угла. При течении внутри тупого угла сверхзвукового потока газа со скоростью υ1 создается косой скачок уплотнения, который образует с горизонтальной осью угол β (рис). Надо отметить, что если при прямом скачке уплотнения согласно теореме Прандтля сверхзвуковое течение после скачка уплотнения непременно становится дозвуковым, то при прохождении потока через косой скачок уплотнения сверхзвуковая скорость может сохраниться и за скачком уплотнения.



Разложим вектор скорости υ_1 на две составляющие: нормальную υ_{1n}, (перпендикулярную линии скачка уплотнения) и касательную υ_{1t} (параллельную линии скачка уплотнения). При прохождении потока через косой скачок уплотнения вектор скорости υ_2 потока имеет направление, параллельное ограничивающей поверхности. Разложим вектор скорости υ_2 также на две составляющие: υ_{2n} и υ_{2t} (см. рис.).

При исследовании косого скачка уплотнения будем использовать следующие интегральные соотношения:

1) уравнение неразрывности (закон сохранения массы), записанное для нормальных составляющих скоростей, полученных при косом скачке уплотнения:

$$\rho_1 u_{1n}=\rho_2 u_{2n}$$

2) закон сохранения полного импульса в проекции на линию разрыва:

$$\rho_1 u_{1n} u_{1t}=\rho_2 u_{2n} u_{2t}$$

3) и на нормаль к линии разрыва:

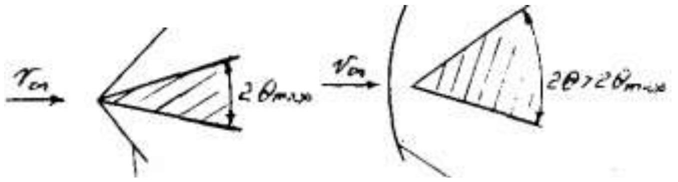
$$p_1 + \rho_1 u_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 u_{2n}^2$$

4) уравнение энергии (закон сохранения полной энтальпии):

$$w_1 + \frac{u_{1n}^2}{2} = w_2 + \frac{u_{2n}^2}{2}.$$

Здесь мы учли, что из 1) и 2) следует, что касательные составляющие скоростей до и после косого скачка уплотнения одинаковы $u_{1t} = u_{2t}$.

Касательные и нормальные компоненты векторов скоростей можно выразить через угол отклонения потока θ и угол наклона поверхности разрыва β. Тогда система уравнений позволяет определить угол наклона поверхности разрыва при обтекании клина заданным потоком. Оказывается, что в случае косого скачка уплотнения поток после скачка может иметь как дозвуковую (локальную) скорость, так и сверхзвуковую, что отличает его от прямого скачка. Существует критический угол $\vartheta = \vartheta_{\max}$, при котором эти режимы совпадают. При этом возникает *присоединенный* скачок. При дальнейшем увеличении угла наклона клина поверхность разрыва не будет проходить через его вершину – возникнет *отсоединенный* скачок.



Дополнить семинаром

1) Расчет угла наклона скачка
2) Сильный и слабый скачок
3) Ударная поляра