Волновое движение

1. Волновые уравнения

При описании среды в переменных Эйлера физические характеристики ее определяются заданием некоторой величины (или совокупности физических величин) в каждой точке пространства в данный момент времени. Изменение этих величин (в данной точке пространства) с течением времени называется движением.

Среди возможных движений сплошной среды выделяется волновое движение, которое в большинстве случаев можно интерпретировать, как последовательное перемещение значений физических величин, заданных в некоторый (начальный) момент времени в определенных точках пространства от одной точки к другой. Представление о волновом движении в простейшем случае иллюстрируется одномерным движением. Пусть при $t=0$ в некоторой области пространства $0<x<l$ задано начальное распределение физической величины (например, плотности массы) с помощью функции: $\rho(x,\,0)=f(x)$. Движение называется волновым, если с течением времени изменение распределения плотности можно интерпретировать, например, как смещение начального распределения в положительном направлении оси OX :

$$\rho(x,t)=f(x-Vt).$$

В рассматриваемом случае смещение пропорционально времени. Коэффициент пропорциональности называется (фазовой) скоростью волны.

Если начальное распределение задано дифференцируемой функцией, то нетрудно найти дифференциальное уравнение (в частных производных), которому удовлетворяет данное волновое движение среды:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Полученное уравнение называется <u>уравнением простой волны</u>.

Если начальное распределение не описывается дифференцируемой функцией, то уравнение волнового движения удобнее задавать в интегральной форме, рассматривая перенос волной данной физической величины (например массы) через границу выделенного объема.

$$m(t)=\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t)dx$$

Изменение массы в данной области, вызванное волновым движением среды, определяется потоком ее через границу:

$$\dot m(t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t)dx=-V\int_{x_2}\rho(x)d\sigma+V\int_{x_1}\rho(x)d\sigma=-\oint_{\Sigma}\rho(x)\vec V d\vec\sigma \tag{2}$$

Для дифференцируемой функции, используя теорему Гаусса, это соотношение можно привести к виду:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho(x)V)dx\,,$$

что сразу же дает дифференциальное уравнение (1).

Если среда является изотропной и допускает распространение волн как в положительном, так и в отрицательном направлении с одинаковой скоростью, то волновое уравнение (1) удобно заменить уравнением второго порядка:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-V^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=0, \tag{3}$$

решение которого представляет произвольную суперпозицию функций $\rho(x,t)=f_1(x-Vt)+f_2(x+Vt)$, описывающих две волны, распространяющиеся навстречу друг другу.

Представление Фурье позволяет описывать произвольную функцию в виде интеграла:

$$\rho(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\rho}(k,\omega)\exp\{ikx-i\omega t\}dk\ ,$$

где каждая монохроматическая волна, представляемая Фурье-компонентой $\tilde{\rho}(k,\omega)$, удовлетворяет волновому уравнению (3), что приводит к соотношению (4), связывающему волновое число k и частоту ω:

$$\omega^2-V^2k^2=0, \tag{4}$$

которое называется дисперсионным соотношением.

Решение волнового уравнения в виде монохроматической волны называется нормальной волной и является обобщением решения линейного уравнения для определения собственных колебаний системы.

Во многих случаях распространение волны в среде сопровождается изменением формы начального распределения. Фурье-разложение представляет естественный подход для обобщения понятия волнового движения. Действительно, начальное распределение физической величины может быть задано как суперпозиция нормальных волн с различной скоростью распространения. В этом случае можно задать $V=V(k)$ или $V=V(\omega)$ и исследовать распространение волнового пакета. Для упрощения поставленной задачи положим, что в некоторой окрестности значений волнового числа k задано дисперсионное соотношение (4), которое представлено лишь первыми членами разложения:

$$\omega=\omega(k)=\omega_0+\frac{\partial\omega}{\partial k}(k-k_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}(k-k_0)^2+o\left((k-k_0)^2\right), \tag{5}$$

где $\omega_0=\pm Vk_0$.

Пространственное распределение физической величины представляется в виде интеграла Фурье:

$$\rho(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\rho}(k,\omega)\exp\left\{ikx-i\left[\omega_0+\omega_0'(k-k_0)+\omega_0''(k-k_0)^2/2\right]t\right\}dk=$$

$$=\exp\{ik_0(x-Vt)\}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\rho}(k_0+k,\omega)\exp\left\{i(x-\omega_0't)k-i(\omega_0''t/2)k^2\right\}dk\ .$$

Если волновой пакет состоит из группы волн с близкими значениями волнового числа $|k-k_0|<\Delta$ и одинаковыми амплитудами, то при $\omega_0'\Delta>>\omega_0''\Delta^2$ волновое решение имеет вид волны с изменяющейся амплитудой:

$$\rho(x,t)=A(x,t)\exp\{ik_0(x-Vt)\},$$

где

$$A(x,t)=\tilde{\rho}(k_0)\int_{-\Delta}^{+\Delta}\exp\{i(x-\omega_0't)k\}dk=\tilde{\rho}(k_0)\frac{2\sin((x-\omega_0't)\Delta)}{(x-\omega_0't)\Delta}.$$

Полученное пространственное распределение физической величины называется волновым пакетом и распространяется со скоростью $V_{gr}=\dfrac{\partial\omega}{\partial k}$, называемой групповой скоростью волны. Область локализации волнового пакета определяется не равными нулю членами Фурье-разложения $\tilde{\rho}(k,\omega)$, вносящими заметный вклад в интеграл. При вычислении интеграла мы полагали, что отличные от нуля члены дают заметный вклад лишь в малой окрестности k_0.

Квадратичные члены разложения (5) приводят к изменению начальной формы пакета – его расплыванию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i(x-\omega_0't)k-i(\omega_0''t/2)k^2\right\}dk=\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0''t}}\exp\left\{-i\frac{(x-\omega_0't)^2}{2\omega_0''t}+i\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Явление расплывания волнового пакета, образованного из нормальных волн с различной фазовой скоростью распространения, называется дисперсией (от лат. Dispersio – рассеяние, уничтожение).

Волновое уравнение для волн, обладающих дисперсией, несколько сложнее рассмотренного ранее простейшего. Примером может служить уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

для которого дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2(k) = c^2k^2 + \omega_0^2.$$

Фазовая скорость этой волны

$$V_{ph}(k) = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\omega_0^2/c^2k^2},$$

а групповая

$$V_{gr}(k) = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1+\omega_0^2/c^2k^2}}.$$

Связь между фазовой и групповой скоростью нетривиальна. Возможны случаи, когда эти скорости отличаются знаком.

Полученные результаты допускают естественное обобщение на многомерные системы. В этом случае приходится вместо волнового числа вводить волновой вектор $\vec{k}$, определяющий направление распространения волны. Поверхность постоянной фазы, определенная в некоторый момент времени, называется волновым фронтом. Волновой вектор определяет нормаль к волновому фронту – направление распространения волны.

Другая возможность обобщения понятия волнового движения связана с рассмотрением процессов переноса выделенного состояния среды со скоростью, определяемой этим состоянием (в каждой точке). Рассмотрим вновь одномерную волну. Пусть начальное распределение задано на некотором интервале, например $0 < x < l$, некоторой функцией $\rho(x,0) = f(x)$, а распространение волны происходит со скоростью, определяемой состоянием среды в данной точке: $V = V(\rho)$. В этом случае в момент времени $t \neq 0$ координата точки, имевшей значение $\rho(s)$ изменится:

$$x = s + V(f(s))t \tag{6}$$

Это уравнение можно рассматривать, как параметрическое задание волнового решения в произвольный момент времени, поскольку оно определяет структуру волны $\rho(x,t)$ по заданному начальному распределению. Если распределение описывается дифференцируемой функцией, то нетрудно получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет волновое движение рассматриваемого типа. Действительно, $\rho(s)$ определяет волну в произвольный момент времени, если уравнение (6) определяет (в неявной форме) значение параметра $s = s(x,t)$ в произвольный момент времени в данной точке пространства. Дифференцирование дает:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \rho'\frac{\partial s}{\partial x} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \rho'\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Из уравнения (6) следует:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{1+V't} \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{V}{1+V't}.$$

Отсюда для дифференцируемой функции $\rho(x,t)$ получается нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее волновой процесс:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Уравнение такого типа называется квазилинейным. Описанный метод построения решения квазилинейного уравнения называется методом характеристик (Римана). Напомним, что характеристикой уравнения называется зависимость $x = x(t, f_0)$, определяющая закон движения точки с заданным значением физической величины $f_0 = const$. Дифференцирование этого соотношения позволяет определить скорость распространения рассматриваемой точки «вдоль характеристики». В частности, для указанного нелинейного уравнения скорость распространения постоянна.

Однозначное решение указанного типа для произвольного начального распределения может существовать лишь в ограниченной области пространства в течение ограниченного интервала времени.

Рассмотрим простой пример. Пусть, для определенности, скорость распространения волны пропорциональна величине возмущения среды, т. е. $V(\rho) = V_0 \frac{\rho}{\rho_0}$, а начальное распределение задано зависимостью, изображенной на рисунке

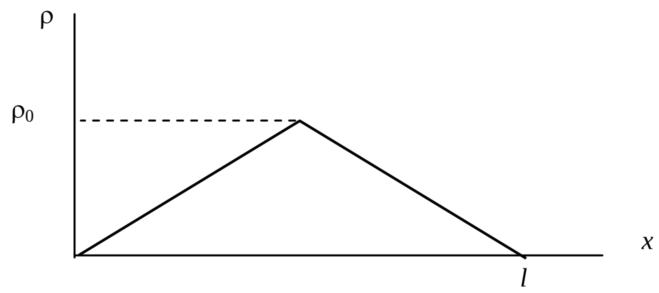


Рис.

Деформация профиля волны, обусловленная тем, что скорость точки с максимальным значением $\rho = \rho_0$ превышает скорость всех остальных участков волны, изображена на рисунке.

Для рассмотренного распределения решение перестает быть однозначной функцией координаты при $t > t_0$. Определить дальнейшую эволюцию системы с помощью дифференциального уравнения невозможно, поэтому дальнейшее описание процесса мы проведем с помощью интегральных соотношений. Квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

где

$$\Phi = \int V(\rho)\,d\rho.$$

Ему соответствует интегральное соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)dx = \Phi(x_1) - \Phi(x_2).$$

Для рассматриваемого случая

$$\Phi = \int V(\rho)d\rho = \frac{\rho^2}{2\rho_0}.$$

Выбирая контрольные поверхности в точках, где поток равен нулю, получим закон сохранения (массы) в выделенном объеме:

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)dx = const.$$

Предположим, что в начальный момент времени имеется разрывное решение (сформировавшееся из рассмотренного ранее непрерывного треугольного)

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \rho_0\, x/l & 0 < x < l \\ 0 & x > l \end{cases}$$

Если при дальнейшей эволюции этого решения имеется лишь единственный разрыв, а то его координата x_1 в момент $t = t_1$, отсчитываемый после образования разрыва, связана с точкой образовния разрыва l, соотношением $\dfrac{x_1}{l + V_0 t} = \dfrac{\rho_1}{\rho_0}$, следующим из подобия треугольников *OAC* и *OBD*, изображенных на рис. Здесь мы полагаем, что существование разрыва никак не влияет на распространение волны слева от него.

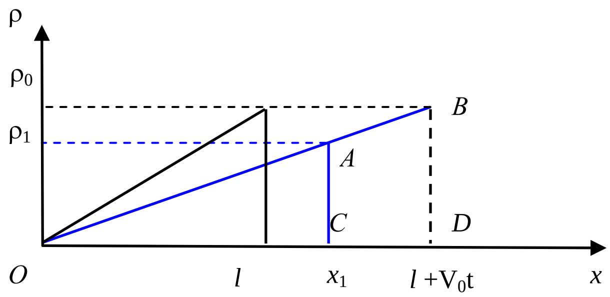


Рис.

Закон сохранения (массы) дает второе соотношение:

$$\rho_0 l = \rho_1 x_1.$$

Исключая плотность среды, получим закон движения разрыва – «фронта ударной волны»:

$$x_1(t) = l\sqrt{1 + V_0 t/l}.$$

Движение разрыва происходит со скоростью

$$\dot{x}_1(t) = V_0/2\sqrt{1 + V_0 t/l}.$$

Амплитуда волны с течением времени убывает:

$$\rho_1(t) = \rho_0\Big/\sqrt{1 + V_0 t/l}.$$

Квазилинейные уравнения широко используются для описания волновых процессов, сопровождающихся деформацией начального распределения.

Обобщения. Известны и широко используются обобщения квазилинейных уравнений, описывающие распространение волновых пакетов (специальной формы) без деформаций.

1) Уравнение Кортевега – де Фриса (КдФ)

Это уравнение получается добавкой «дисперсионного» члена:

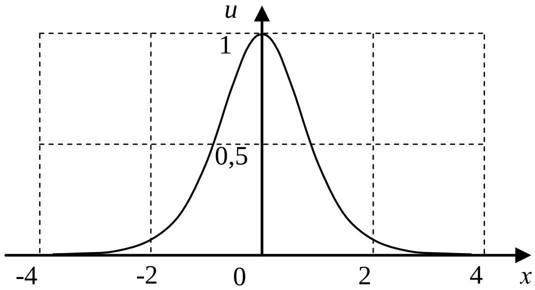
$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1+12u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 .$$

Решение уравнения КДФ, убывающее на бесконечности, имеет вид

$$u(x,t) = \frac{a^2}{4}\,\mathrm{ch}^{-2}\left(a\left(x-\left(1+a^2\right)t+b\right)/2\right),$$

где a, b - произвольные постоянные.

Оно описывает уединенную волну – **солитон,** распространяющийся со скоростью $V(a) = 1 + a^2$, зависящей от амплитуды волны.



Рис

2) Уравнение Бюргерса (с диссипацией)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Для этого уравнения известно **решение Тейлора** («ударная волна»), имеющее вид:

$$u(x,t) = a\delta\left\{1-\mathrm{th}\left(ax-\delta a^2 t/2\right)\right\}$$

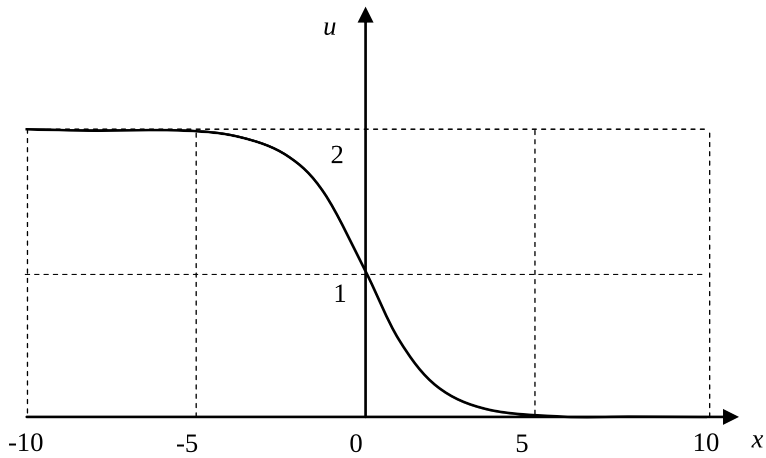


Рис.

2. Малые возмущения в газах

Рассмотрим распространение малых возмущений в среде. Пусть равновесное состояние среды описывается параметрами p_0, ρ_0, V, а отклонения от этих значений в каждой точке пространства в любой момент времени (возмущения) малы и описываются дифференцируемыми функциями p, ρ, u:

$$\widehat{p} = p_0 + p, \quad \widehat{\rho} = \rho_0 + \rho, \quad v_k = V_k + u_k .$$

Уравнение непрерывности и уравнение Эйлера для сплошной среды

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{\rho} v_k)}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial (\widehat{\rho} v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{\rho} v_i v_k)}{\partial x_k} = 0$$

при подстановке в них выражений для плотности и скорости дают в линейном приближении по возмущениям следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\rho V_k)}{\partial x_k} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_0 V_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 .$$

Для рассматриваемых баротропных процессов давление среды определяется лишь ее плотностью в данной точке пространства, так что уравнения движения дополняются зависимостью

$$\widehat{p} = \widehat{p}(\widehat{\rho}) .$$

Обычно при описании распростанении звуковых волн предполагается, что термодинамические процессы в элементарном объеме среды являются квазиравновесными и происходят без изменения числа частиц в данном объеме и без теплообмена. В этом случае можно использовать модель адиабатических процессов, в которых зависимость давления от плотности дается соотоношением:

$$\widehat{p} = p_0 (\widehat{\rho} / \rho_0)^{\gamma} ,$$

где $\gamma = c_p / c_v$ - отношение теплоемкостей при изобарном и изохорном процессах.

Выполняя дифференцирование по координатам и вводя обозначение

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = c^2 ,$$

получим систему дифференциальных уравнений для возмущений плотности и скорости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + V_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_0 V_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0$$

Часто для решения системы используется метод исключения одной из переменных, например, возмущения скорости. Получившееся при этом уравнение для возмущения плотности среды будет уравнением второго порядка:

$$\frac{{}^2\varrho}{t^2} + 2V_k \frac{{}^2\varrho}{x_k \;\, t} - c^2 \frac{{}^2\varrho}{x_k \;\, x_k} + V_k V_m \frac{{}^2\varrho}{x_k \;\, x_m} = 0 .$$

Будем искать решение линейной однородной системы в виде суперпозиции плоских монохроматических волн плотности и скорости. Воспользуемся для этого представлением решения в виде интеграла Фурье

$$\rho(x_k, t) = \int \tilde{\rho}(k_k) \exp\{i\omega t - ik_s x_s\} d^3k$$

$$u_i(x_k, t) = \int \tilde{u}_i(k_k) \exp\{i\omega t - ik_s x_s\} d^3k$$

Подставляя эти решения в уравнения и проводя дифференцирование, получим для трансформант Фурье систему алгебраических уравнений:

$$(\omega - V_k k_k)\tilde{\rho} - \rho_0 k_k \tilde{u}_k = 0$$

$$-c^2 k_i \tilde{\rho} + \rho_0 (\omega - V_k k_k)\tilde{u}_i = 0 .$$

Система будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель обращается в ноль, что позволяет определить значения частоты ω, при которой существуют волновые решения. Дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между волновым вектором и частотой, удобно получить, если умножить второе уравнение на k_i и рассматривать нетривиальные решения системы относительно величин $\tilde{\rho}$ и $\tilde{z} = (k_i \tilde{u}_i)$. В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид:

$$(\omega - V_k k_k)^2 = c^2 k^2$$

Вводя угол θ между вектором скорости невозмущенной среды и волновым вектором (направлением распространения волны), приведем уравнение к виду

$$(\omega - Vk\cos\vartheta)^2 = c^2 k^2 .$$

Решение полученного уравнения имеет вид:

$$\omega = \omega_0 (1 + V\cos\vartheta / c),$$

где введено обозначение $\omega_0 = ck$.

Решение с $\omega > 0$ существует для любых направлений волнового вектора, если скорость движения невозмущенной среды *V* меньше фазовой скорости распространения волны в изотропной среде *c*.

Величина фазовой скорости монохроматической волны зависит от скорости среды и V и направления распространения волны

$$V_{ph} = \frac{\omega}{k} = c + V\cos\vartheta .$$

Волна подвергается "сносу" потоком, движущимся со скоростью *V*.

Из уравнения непрерывности для возмущений следует, что вектор скорости возмущения u_i направлен вдоль волнового вектора

В том случае, когда скорость невозмущенного потока *V* превосходит скорость звука (в неподвижной среде) $V > c$, распространение волны ограничено углами, при которых выполняется неравенство $c + V\cos\vartheta > 0$. Волны, волновой вектор которых составляет угол .ϑ. с направлением вектора скорости среды *V*, имеют фазовую скорость, равную нулю, т.е. поверхность постоянной фазы плоской волны любой частоты не перемещается в пространстве (относительно выбранной системы отсчета). Волновой фронт такой волны составляет с вектором скорости потока угол φ, такой что $\sin\varphi = c/V$. Этот угол называется углом Маха. Если возмущение среды вызвано неподвижным источником, находящимся в некоторой точке среды, например, в начале координат, то волны, создаваемые таким источником, распространяются внутри конуса, вершина которого совпадает с точечным источником, а угол при вершине равен 2φ. Этот конус называется конусом Маха. Распространение волновых возмущений вне конуса навстречу набегающему потоку невозможно.

3. Излучение источника в движущейся среде

Для более подробного анализа возмущений среды, создаваемых точечным источником, рассмотрим решение системы уравнений, исключив из нее одну из неизвестных, например, скорость. При этом удобно перейти к волновому уравнению второго порядка. Наличие точечного источника возмущения плотности описывается введением δ-функции в правой части уравнения.

Пусть среда, в которой находится источник, движется со скоростью V в положительном направлении оси OX. Размеры источника будем считать пренебрежимо малыми, а его воздействие на среду – периодическим. В этом случае волновое уравнение будет неоднородным. Пусть возмущение среды описывается скалярной функцией φ:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2V\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z}-\left(c^2-V^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}-c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right\}\varphi=4\pi qc^2\delta(x)\delta(y)\delta(z)\cos\boldsymbol{\Omega}t\,.$$

Решение уравнения удобно проводить с помощью разложения Фурье по плоским волнам:

$$\varphi(\vec{r},t)=\int d\vec{k}\,\tilde{\varphi}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{r}}\,,\qquad \delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int dk_x e^{ik_x x}\,,$$

что дает для временной зависимости фурье-компоненты уравнение вынужденных колебаний вида

$$\ddot{\tilde{\varphi}}-2iVk_z\dot{\tilde{\varphi}}+c^2\left(1-\beta^2\right)k_z^2\tilde{\varphi}+c^2k_\perp^2\tilde{\varphi}=F(t),\qquad(1)$$

с правой частью

$$F(t)=\frac{4\pi qc^2}{(2\pi)^3}\cos\Omega t\,.$$

Решение уравнения вынужденных колебаний мы будем проводить с помощью функции Грина, что позволяет в явном виде учесть условие причинности. Будем искать это решение в виде

$$\tilde{\varphi}(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}G(t-t')F(t')dt'\,.\qquad(2)$$

Интегрирование по времени формально можно вести до $t\to\infty$, если положить, что функция Грина имеет вид:

$$G(t-t')=\begin{cases}G(t-t') & t'<t\\ 0 & t'>t\end{cases}.$$

Такое представление функции Грина соответствует обычному представлению о последовательности причинно-следственных связях, когда динамическая переменная не может зависеть от будущего воздействия на систему.

Подставляя решение (2) в уравнение (1), для функции Грина получим уравнение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\ddot{G}(t-t')-2iVk_z\dot{G}(t-t')+c^2\left[\left(1-\beta^2\right)k_z^2+c^2k_\perp^2\right]G(t-t')\right\}F(t')dt'=F(t),\qquad(3)$$

откуда следует, что выражение в фигурных скобках является δ-функцией:

$$\ddot{G}(t-t')-2iVk_z\dot{G}(t-t')+c^2\left[\left(1-\beta^2\right)k_z^2+c^2k_\perp^2\right]G(t-t')=\delta(t-t')\,.\qquad(4)$$

Фурье-образ для функции Грина $\tilde{G}(\omega)$, который мы определим выражением

$$G(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega$$

формально выражается дробью

$$\tilde{G}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{-\omega^2-2\beta ck_z\omega+\left[\left(1-\beta^2\right)c^2k_z^2+c^2k_\perp^2\right]},$$

знаменатель которой обращается в нуль в точках $\omega_{1,2} = -\beta c k_z \mp ck$, где $k = \sqrt{k_\perp^2 + k_z^2}$ - волновое число. Для определения функции Грина $G(t-t')$ следует вычислить интеграл, что удобно сделать с помощью теории вычетов. При этом можно так выбрать контур интегрирования, что условие причинности будет выполнено автоматически. Для этого достаточно обойти полюса сверху в комплексной плоскости ω или, что тоже самое, сместить оба полюса вниз с действительной оси на малую величину $\varepsilon > 0$, которую после вычисления интеграла следует устремить к нулю.

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}d\omega}{-\omega^2 - 2\beta c k_z \omega + \left[\left(1-\beta^2\right)c^2 k_z^2 + c^2 k_\perp^2\right] - i\varepsilon\omega}.$$

Вычисляя интеграл при $t - t' < 0$ по контуру, который замыкается в верхней полуплоскости, мы получим нуль, так как внутри контура полюсов нет. При $t - t' > 0$ контур следует замыкать в нижней полуплоскости, где расположены полюса. Это приводит к следующему выражению:

$$G(t-t') = -\vartheta(t-t')e^{i\beta c k_z (t-t')}\frac{\sin ck(t-t')}{ck}.$$

Зависимость от времени фурье-компоненты плоской волны имеет вид:

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{4\pi q c}{(2\pi)^3} e^{i\beta c k_z t}\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t-t')e^{-i\beta c k_z t'}\frac{\sin ck(t-t')}{ck}\cos\Omega t' dt'$$

Теперь нетрудно получить выражение для пространственного распределения поля, создаваемого точечным источником:

$$\varphi(\vec{r},t) = -\frac{4\pi q c}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \ (t-t')\cos\mathbf{\Omega} t' \int d\vec{k} e^{i k_z \beta c (t-t')}\frac{\sin ck(t-t')}{k}e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Внутренний интеграл представим в виде:

$$I = \int d\vec{k} e^{i\{k_x x + k_y y + k_z[z - \beta c(t-t')]\}}\frac{\sin ck(t-t')}{k} = \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{R}}\frac{\sin ck(t-t')}{k}, \text{ где } \vec{R} = (x,\ y,\ z\text{-}V(t-t')).$$

Для выполнения интегрирования выберем сферическую систему так, чтобы полярный угол ϑ отсчитывался от вектора $\vec{R}$. Тогда

$$I = \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{R}}\frac{\sin ck(t-t')}{k} = 2\pi\int_0^\infty k^2 dk \frac{\sin(ck\tau)}{k}\int_0^\pi e^{ikR\cos\theta}\sin\theta d\theta = 2\pi\int_0^\infty k dk \sin(ck\tau)\int_{-1}^{1} dq e^{ikRq} =$$

$$= \frac{2\pi}{R}\int_0^\infty k dk \sin(ck\tau)\sin(kR) = \frac{\pi}{2R}\{\delta(c\tau - R) + \delta(c\tau + R)\}.$$

Для запаздывающей функции $\tau = t - t' > 0$, $R > 0$, так что $I = \dfrac{\pi}{2R}\delta(c\tau - R)$ и

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi R}\cos\mathbf{\Omega} t^{ret}.$$

Фаза зависит от запаздывающего времени, обусловленное конечным временем распространения возмущения.

$$t^{ret} = t - \frac{r}{c}\cdot\frac{\beta\cos\vartheta + \sqrt{1-\beta^2\sin^2\vartheta}}{1-\beta^2}.$$

Поверхности равной фазы, определяющие волновой фронт в некоторый момент времени, изображены на рисунке.

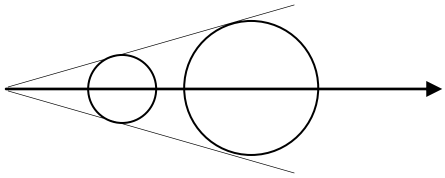


Рис.

При движении потока со скоростью, превышающей скорость звука (в неподвижном газе), область возмущения имеет вид конуса, угол раствора которого называется углом Маха и определяется выражением: $\sin\theta = \dfrac{c}{V}$.

4. Энергия монохроматической волны

Волновое движение сопровождается изменением энергии среды, в которой распространяется волна. Изменение энергии среды при распространении в ней волны при некоторых дополнительных условиях может быть связано с существованием энергии волны. Для ее определения найдем изменение энергии среды, полагая, что амплитуда волны достаточно мала, чтобы воспользоваться линейной теорией.

Энергия выделенного элементарного объема среды V_0 определяется как сумма внутренней энергии вещества в этом объеме и кинетической энергии его движения. Представим скорость частиц среды в виде суммы $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$. Невозмущенное движение среды задано постоянной скоростью $\vec{V}$ в каждой точке пространства, а поле возмущения скорости $\vec{u}$ носит волновой характер, причем $u << V$. Плотность и давление невозмущенной среды ρ_0 и p_0 также будем считать постоянными во всех точках, а возмущения малыми, так что $p = p_0 + p_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где $p_1 << p_0$, $\rho_1 << \rho_0$.

Если е – массовая плотность внутренней энергии среды (энергия единицы массы), то внутренняя энергия рассматриваемого объема $E = e\rho V_0$. Соответственно, кинетическая энергия этого объема $E_{ђЏ'} = \rho\left(\vec{V} + \vec{u}\right)^2 V_0 / 2$. Подставляя сюда значения плотности и скорости возмущенного движения среды, с точностью до квадратичных по возмущению членов получим выражение для изменения объемной плотности кинетической энергии:

$$\Delta E = \frac{\rho_0 u^2}{2} + \left(\rho_0 + \rho_1\right)\left(\vec{V}\vec{u}\right).$$

Для вычисления изменения внутренней энергии возмущенной среды воспользуемся первым началом термодинамики, полагая, что рассматриваемые процессы являются изэнтропическими ΔS = 0. При этом теплообменом с соседними элементарными объемами можно пренебречь. Изменение внутренней энергии заданной массы *m* в этих условиях определяется только работой сил давления:

$$d\mathrm{E} = mde = -pdV$$

Учитывая, что $V = m/\rho$, получаем соотношение для массовой плотности внутренней энергии в адиабатическом изэнтропическом процессе:

$$de = \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Изменение внутренней энергии элементарного объема V_0 определяется выражением:

$$dE = V_0 d(\rho e) = V_0(ed\rho + \rho de) = V_0(e + \frac{p}{\rho})d\rho.$$

Изменение объемной плотности внутренней энергии с точностью до членов второго порядка имеет вид:

$$\Delta(\rho e) = \frac{\partial(\rho e)}{\partial\rho}\rho_1 + \frac{\partial^2(\rho e)}{\partial\rho^2}\cdot\frac{\rho_1^2}{2} + o(\rho_1^2).$$

Коэффициенты разложения в ряд легко вычисляются

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial\rho} = \left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \right)$$

$$\frac{\partial^2(\rho e)}{\partial\rho^2} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(e + \frac{p}{\rho} \right) = \left(\frac{\partial e}{\partial\rho} \right)_s - \frac{p}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho} \right)_s = \frac{c^2}{\rho_0}$$

где с –скорость звука, что дает выражение для изменения объемной плотности внутренней энергии:

$$\Delta(\rho e) = \left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \right)\rho_1 + \frac{c^2}{2\rho_0}\rho_1^2 .$$

Первое слагаемое описывает изменение внутренней энергии выделенного объема при изменении количества вещества в нем. В частности, при распространении монохроматической волны в достаточно большом объеме вклад от этого члена осциллирует, что нарушает принцип аддитивности для внутренней энергии. Таким образом, аддитивная часть, среднее (по времени) значение которой отлично от нуля, описывается только вторым слагаемым, что и позволяет связать эту часть внутренней энергии с волновым движением. Аналогичным требованиям не удовлетворяет часть кинетической энергии, линейная по возмущению среды.

Таким образом, объемная плотность полной энергией волнового движения, удовлетворяющая принципу аддитивности, пропорциональна квадратичным членам по возмущению и дается выражением:

$$\Delta E = E_{волн} = \frac{\varrho_0 u^2}{2} + \varrho_1\left(\vec{V}\vec{u}\right) + \frac{c^2}{2\varrho_0}\varrho_1^2$$

При распространении в среде плоской монохроматической волны под углом ϑ к вектору скорости потока возмущение плотности и скорости имеет вид:

$$\rho_1(\vec{r},t) = \rho\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right), \quad \vec{u}(\vec{r},t) = c \cdot \frac{c\vec{k}}{\omega - ck\beta\cos\vartheta} \cdot \frac{\rho_1(\vec{r},t)}{\rho_0},$$

где $\beta = V/c$. Подставляя эти выражения, получим плотность энергии монохроматической плоской волны.

Если скорость потока мала ($\beta < 1$), то объемная плотность энергии волны имеет вид:

$$E^{+}_{волн} = \frac{c^2}{\varrho_0}\left(1 + \beta\cos\quad\right)\varrho_1^2 .$$

Как следует из приведенного выражения, эта величина положительна для всех волн, распространяющихся в любом направлении по отношению к невозмущенному потоку.

Если же скорость невозмущенного потока превышает скорость звука ($\beta > 1$), то возможно существование двух типов волн, быстрой и медленной, частоты которых совпадают, а скорость распространения различна.

Энергия этих волн определяется выражением:

$$E^{\pm} = \frac{c^2}{\varrho_0}\left(1 \pm \beta\cos\quad\right)\varrho_1^2 .$$

Если энергия быстрой волны всегда положительна, то распространение медленной волны внутри конуса Маха приводит к уменьшению полной энергии среды, так как энергия медленных волн отрицательна. Уменьшение энергии среды при возникновении медленной волны свидетельствует о неустойчивости системы относительно генерации волновых возмущений, при которых энергия потока будет переходить в энергию волны.

Теорема Пойнтинга утверждает, что изменение энергии сплошной среды в данном объеме в отсутствие объемных сил обусловлено потоками энергии через границу. Для определения вектора плотности потока энергии для волнового движения удобно воспользоваться уравнениями непрерывности Эйлера для малых возмущений. Для упрощения вычислений ограничимся случаем изотропной среды, положив скорость потока равной нулю.

Умножая уравнение Эйлера на скорость частиц в данной точке, получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{u^2}{2} = -\frac{c^2}{\varrho_0} u_k \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_k}. \tag{1}$$

Последнее слагаемое удобно представить в виде суммы и заменить второе слагаемое с помощью уравнения непрерывности.

$$u_k \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_k} = \frac{\partial(\varrho_1 u_k)}{\partial x_k} - \varrho_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial(\varrho_1 u_k)}{\partial x_k} + \frac{\varrho_1}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} \tag{2}$$

Подстановка этого выражения в (1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varrho_0 u^2}{2} + \frac{c^2 \varrho_1^2}{2\varrho_0}\right\} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{c^2 \varrho_1 u_k\right\}.$$

Учитывая выражение для объемной плотности волны, полученное выше, это уравнение можно рассматривать как следствие теоремы Пойнтинга применительно к волновому движению среды:

$$\frac{\partial E_{волн}}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{S},$$

где $\vec{S} = c^2 \varrho_1 \vec{u}$ - вектор потока объемной плотности энергии, а $E_{волн} = \dfrac{\varrho_0 u^2}{2} + \dfrac{c^2}{2\varrho_0}\varrho_1^2$.

Отметим, что перенос энергии волной сопровождается переносом импульса, поток которого нетрудно определить аналогичным образом.

5. Сильные волны

В предыдущих разделах при изучении волнового движения мы ограничивались приближением слабых волн, что позволяло линеаризовать уравнения. Рассмотрим теперь сильные возмущения, не допускающие линеаризации уравнений движения.

Модель среды

В дальнейшем будем предполагать, что зависимость давления от плотности (и скорости) может быть установлена в рамках классической термодинамики. Будем считать движение изэнтропийным и адиабатическим.

Для упрощения анализа положим, что все характеристики волнового движения среды – плотность, скорость, давление и т. д. являются дифференцируемыми функциями координат и времени. Тогда в основных уравнениях можно перейти к дифференциальной форме. Уравнение непрерывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

Ограничимся случаем идеальной изотропной среды, пренебрегая вязкостью. Динамическое уравнение Эйлера в этой модели

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Ограничимся моделью идеального газа, для которого зависимость давления от плотности определяется адиабатой Пуассона

$$p = p_0(\rho/\rho_0)^{\gamma}.$$

Одномерная волна

Исследование свойств модели удобно начать с простейшего случая одномерного волнового движения.

Предположим, что в безграничной среде могут существовать волны, зависящие только от одной координаты, например от x. В этом случае все характеристики волнового движения среды – плотность, скорость, давление и т. д. могут зависеть только от этой координаты и времени.

Уравнения движения при таком предположении упрощаются и принимают вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial x}=0$$

С учетом уравнения непрерывности последние два уравнения системы принимают форму характеристических:

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}=0$$

Это означает, что на траекториях частиц y и z – компоненты вектора скорости остаются постоянными. Таким образом, рассматриваемая модель допускает существование только продольных волн

$$u_i=\{u,\ 0,\ 0\},$$

которые описываются системой

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Решения Римана

Поскольку нас интересуют волновые решения, естественно предположить, что скорость, плотность и давление среды зависят от одной комбинации координаты и времени. Это позволяет искать, например, скорость и давление как функции плотности $u=u(\rho),\ p=p(\rho)$.

Тогда частные производные скорости можно выразить через производные плотности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u'\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=u'\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Здесь штрихом обозначена производная скорости по плотности.

Заданная зависимость давления от плотности также позволяет связать производную давления по координате с производной плотности по координате:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=c^2(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

где

$$c^2(\rho)=\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s=\gamma\, p(\rho)/\rho\,.$$

Производная в рассматриваемой модели вычисляется при постоянной энтропии.

С учетом сделанных предположений уравнение непрерывности и уравнение Эйлера приводятся к виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(u+\rho u')\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}=0 \qquad u'\cdot\frac{\partial \rho}{\partial t}+\left(uu'+c^2/\rho\right)\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}=0\,.$$

Эти уравнения можно рассматривать как систему для определения неизвестной функции

$$\rho=\rho(t,x).$$

Условие существования нетривиального решения – обращение в нуль определителя:

$$\left(uu' + c^2/\rho\right) - u' \cdot \left(u + \rho u'\right) = 0 .$$

Отсюда следует, что скорость должна удовлетворять условию:

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho} .$$

Решение этого дифференциального уравнения определяет связь между скоростью и плотностью среды

$$u(\rho) = \pm \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho + const .$$

Уравнение непрерывности теперь может быть записано в форме характеристического уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \pm c) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 .$$

Соотношения между скоростью и плотностью, записанные в форме

$$u \mp \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = const$$

и выполняющиеся на характеристиках

$$V_{\pm} = u \pm c$$

называются ***инвариантами Римана.***

Решение уравнения для плотности, следовательно, может быть представлено в форме:

$$\rho_{\pm} = \Phi\left(x \mp V(\rho) \cdot t\right)$$

Для принятых условий деформаций элементарного объема идеального газа зависимость характеристической скорости, например, V_+ от плотности выражается простым соотношением:

$$V_+ = c_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (\rho/\rho_0)^{\frac{\gamma - 1}{2}} ,$$

где $c_0 = \sqrt{\dfrac{p_0}{\rho_0}}$.

Отметим основные свойства волны в данной модели:

1. Уравнения газовой динамики допускают существование волновых решений в виде продольных волн. Так как волновые уравнения существенно нелинейны, то скорость распространения волны, заданной в начальный момент дифференцируемой функцией, зависит от величины начального возмущения в данной точке пространства и увеличивается с ростом возмущения.
2. Любое возмущение, описываемое в начальный момент дифференцируемой функцией, спустя некоторое время становится разрывным. Волновое решение, описываемое разрывным решением, называется ударной волной. Время формирования разрывного решения определяется как формой, так и величиной начального возмущения.
3. Распространение ударной волны не может быть описано системой дифференциальных уравнений. Для описания движения ударной волны следует воспользоваться теоремами динамики в интегральной форме.

Проводящая среда в магнитном поле

1. Система уравнений самосогласованной задачи

До сих пор мы рассматривали движение вещества под действием объемных сил тяжести. Представляет интерес рассмотреть движение проводящего вещества в электромагнитном поле. Возникающие при движении токи порождают электромагнитные поля, которые могут оказывать влияние на движение среды, поэтому рассмотрим уравнения, описывающие самосогласованную систему среда + поле.

Построим систему уравнений для описания самосогласованной задачи. Выделим 3 группы уравнений.

I. *Система уравнений механического движения сплошной среды* состоит из двух уравнений:

1. Уравнения непрерывности

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

2. Уравнения Эйлера

$$\varrho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\, p + \vec{f}^{\,A}$$

Мы рассматриваем идеальную жидкость, для которой тензор напряжений имеет вид $p_{ik} = -p\delta_{ik}$, и плотность объемных зарядов которой равна нулю. Механическое воздействие поля на такую проводящую среду определяется силами Ампера, пропорциональными токам проводимости. Объемная плотность этих сил определяется выражением

$$\vec{f}^{\,A} = \frac{1}{c}\left[\vec{j} \times \vec{H}\right].$$

II. *Термодинамические уравнения*, включающие термическое и калорическое уравнения состояния системы

$$p = p(\varrho, T, H), \qquad e = e(\varrho,\, T,\, H),$$

а также уравнения процессов, происходящих со сплошной средой.

В приложениях часто ограничиваются адиабатическими процессами, в которых теплообменом можно пренебречь, и влияние поля на состояние вещества мало, так что второе начало термодинамики

$$dq = de + pd(1/\varrho)$$

приводит к уравнению

$$de + pd(1/\varrho) = 0\,.$$

III. Уравнения, определяющие *поле в движущейся среде – уравнения Максвелла*

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0,$$

Здесь мы предполагаем, что электрическая и магнитная проницаемость вещества равна единице, а плотность объемных зарядов в среде равна нулю.

Если ограничиться квазистационарными процессами, то в уравнениях Максвелла можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости ($\left|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right| << \left|\vec{j}\right|$). В этом случае уравнения Максвелла еще больше упрощаются, поскольку теперь можно положить $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Уравнения Максвелла устанавливают связь между плотностью тока проводимости и напряженностью магнитного поля, что позволяет определить плотность силы Ампера, действующей на проводящую среду, как функцию поля.

$$\vec{f}^{A}=\frac{1}{c}\left[\vec{j}\times\vec{H}\right]=-\frac{1}{4\pi}\left[\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}\right].$$

Уравнение Эйлера для квазистационарных процессов удобно записать в виде:

$$\boxed{\varrho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\operatorname{grad}\,p-\frac{1}{4\pi}\left[\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}\right].}$$

2. Тензор напряжений для проводящей среды в магнитном поле

Плотность силы Ампера $f^{A}=-\frac{1}{4\pi}\left[\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}\right]$ можно представить в виде

$$f^{A}=-\vec{\nabla}\left(\frac{H^{2}}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}$$

воспользовавшись тождеством $\left[\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}\right]=\left[\vec{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right]=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(H^{2}\right)-\left(\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}$.

В тензорной форме выражение для плотности силы Ампера имеет вид:

$$f_{i}^{A}=-\frac{\partial}{\partial x_{i}}\frac{H^{2}}{8\pi}+\frac{H_{k}}{4\pi}\frac{\partial H_{i}}{\partial x_{k}}.$$

Поскольку $\frac{\partial H_{k}}{\partial x_{k}}=\operatorname{div}\vec{H}=0$ плотность силы Ампера f_{i}^{A} представима в виде производной от симметричного тензора

$$f_{i}^{A}=-\frac{\partial}{\partial x_{k}}\left(\delta_{ik}\frac{H^{2}}{8\pi}-\frac{H_{i}H_{k}}{4\pi}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_{k}}M_{ik}.$$

Тензор $M_{ik}=-\delta_{ik}\frac{H^{2}}{8\pi}+\frac{H_{i}H_{k}}{4\pi}$ называется- максвелловским тензором магнитных напряжений.

Представление объемных сил Ампера в той же форме, что и поверхностных, позволяет описать взаимодействие в среде с помощью тензора напряжений. Для идеальной жидкости в магнитном поле тензор напряжений определяется выражением:

$$P_{ik}=-\delta_{ik}p+M_{ik}.$$

Уравнение Эйлера в этом случае приводится к виду:

$$\boxed{\varrho\frac{dv_{i}}{dt}=\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_{k}}}.$$

3. Уравнения Максвелла в среде с высокой проводимостью

В уравнения Максвелла входит выражение для плотности тока в среде. В соответствии с нашим предположением, что объемные заряды отсутствуют, ток в среде является током проводимости, плотность которого пропорциональна скорости упорядоченного движения (дрейфа) носителей в веществе $\vec{u}$:

$$\vec{j}=en\vec{u}$$

здесь n - концентрация носителей заряда e. В соответствии с законом Ома будем считать, что эта скорость пропорциональна сумме сил, действующих на носители в веществе со стороны поля:

$$\vec{u} \sim \vec{f}$$

В неподвижных проводниках дрейф носителей обусловлен обычно электрическими полями. В рассматриваемом случае проводники могут перемещаться, поэтому на носители действует еще и сила Лоренца, пропорциональная скорости их движения в данной системе отсчета. Скорость эта складывается из скорости движения проводников и скорости дрейфа. Полагая, что скорость дрейфа носителей много меньше скорости движения среды $|\vec{u}| << |\vec{v}|$, запишем соотношение для скорости дрейфа носителей в виде

$$\vec{u} \sim e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right]\right).$$

Это позволяет записать закон Ома, учитывающий действие сторонних (неэлектрических) сил в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \lambda\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right]\right).$$

В случае среды, обладающей высокой проводимостью, заметная плотность тока возникает при малых силах, действующих на носители. В пределе можно считать, что эти силы пренебрежимо малы, что соответствует квазиравновесным состояниям носителей в веществе, когда

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] = 0.$$

Это значительно упрощает уравнения Максвелла, поскольку позволяет исключить из них электрическое поле. В этом случае $\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\left[\vec{H} \times \vec{v}\right]$ и уравнение Максвелла приводит к условию квазистатичности

$$\boxed{\operatorname{rot}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

4. Условия «вмороженности» силовых линий

Напомним, что векторное поле, линии которого в любой момент проходят через одни и те же частицы среды, называется «вмороженненным». Условие вмороженности силовых линий магнитного поля в вещество имеет вид:

$$\boxed{\dot{\vec{H}} = \left(\vec{H} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v}}$$

В веществе высокой проводимости скорость и напряженность магнитного поля связаны условием квазистатичности

$$\operatorname{rot}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Используем тождество

$$\operatorname{rot}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] = \vec{v}\operatorname{div}\vec{H} - \vec{H}\operatorname{div}\vec{v} + \left(\vec{H}\vec{\nabla}\right)\vec{v} - \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{H}.$$

Из уравнений Максвелла $\operatorname{div}\vec{H} = 0$, а в случае несжимаемой жидкости и $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, поэтому для несжимаемой жидкости условие квазистатичности при высокой проводимости приводит к уравнению

$$\operatorname{rot}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \left(\vec{H}\vec{\nabla}\right)\vec{v} - \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{H}.$$

Вводя субстанциальную производную $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)$, нетрудно получить связь между вектором скорости и напряженности магнитного поля в несжимаемой среде (жидкости) высокой проводимости

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = (\vec{H}\vec{\nabla})\vec{v},$$

Но это как раз условие «вмороженности» силовых линий поля в вещество, рассмотренное выше.

Следовательно, силовые линии магнитного поля «вморожены» в несжимаемом веществе высокой проводимости.

5. Теорема об изменении энергии

Умножая уравнение Эйлера скалярно на вектор скорости, можно уравнение, описывающие изменение плотности энергии проводящей среды в магнитном поле:

$$\varrho\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}p) - \frac{1}{4\pi}\left(\vec{v}\cdot\left[\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}\right]\right).$$

Левая часть этого уравнения преобразуется к виду:

$$\varrho\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \varrho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varrho v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho v^2}{2}\right) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\frac{\varrho v^2}{2} - \frac{v^2}{2}\frac{d\varrho}{dt}.$$

Для преобразования последнего слагаемого воспользуемся уравнением непрерывности:

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho(\vec{\nabla}\vec{v}) = -\vec{\nabla}(\varrho\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\varrho.$$

В итоге левая часть уравнения принимает вид:

$$\varrho\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho v^2}{2}\right) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\frac{\varrho v^2}{2} + \frac{\varrho v^2}{2}(\vec{\nabla}\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho v^2}{2}\right) + \vec{\nabla}\left(\frac{\varrho v^2}{2}\vec{v}\right) \qquad (a)$$

Для вычисления мощности поверхностных сил давления в среде $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})p = \vec{\nabla}(p\vec{v}) - p(\vec{\nabla}\vec{v})$ воспользуемся первым началом термодинамики

$$\frac{de}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{p}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt},$$

которое с учетом уравнения непрерывности можно записать в виде:

$$\frac{de}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{p(\vec{\nabla}\vec{v})}{\varrho}.$$

Из этого выражения с учетом уравнения непрерывности получаем

$$p(\vec{\nabla}\vec{v}) = \varrho\frac{de}{dt} - \dot{q} = \frac{d}{dt}(\varrho e) + \varrho e(\vec{\nabla}\vec{v}) - \dot{q} = \frac{\partial}{\partial t}(\varrho e) + \vec{\nabla}(\varrho e\vec{v}) - \dot{q}.$$

Отсюда для адиабатических процессов $\dot{q} = 0$ мощность сил определяется выражением

$$\left(\vec{f}^{\,пов}\cdot\vec{v}\right) = -(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})p = -\frac{\partial}{\partial t}(\varrho e) - \vec{\nabla}((\varrho e + p)\vec{v}). \qquad (б)$$

Выражение для мощности силы Ампера также удобно преобразовать, учитывая свойства смешанного произведения векторов:

$$\left(\vec{f}^{\,A}\cdot\vec{v}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{v}\cdot\left[\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}\right]\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\left[\vec{v}\times\vec{H}\right]\cdot\operatorname{rot}\vec{H}\right)$$

В рассматриваемом квазистатическом случае для вещества высокой проводимости $\left[\vec{v}\times\vec{H}\right] = -c\vec{E}$, так что

$$\left(\vec{f}^{\,A}\cdot\vec{v}\right) = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}\right).$$

Учитывая тождество $\left(\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}\right)=\left(\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}\right)-\operatorname{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]$ и уравнение Максвелла $\operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, выражение для мощности силы Ампера можно представить в виде:

$$\left(\vec{f}^{\,A}\cdot\vec{v}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\frac{H^2}{8\pi}-\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]. \qquad \text{(в)}$$

Равенства (а), (б) и (в) приводят к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varrho v^2}{2}\right)+\operatorname{div}\left(\frac{\varrho v^2}{2}\vec{v}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\varrho e)-\operatorname{div}\left((\varrho e+p)\vec{v}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\frac{H^2}{8\pi}-\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right],$$

которое можно рассматривать, как уравнение для изменения плотности энергии вещества и поля:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho e+\frac{\varrho v^2}{2}+\frac{H^2}{8\pi}\right)=-\operatorname{div}\left(\left(\varrho w+\frac{\varrho v^2}{2}\right)\vec{v}+\vec{S}\right)}$$

Здесь $w=e+p/\varrho$ - плотность энтальпии, а $\vec{S}=\dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]$ - плотность потока энергии поля.

6. Волны в несжимаемой проводящей среде

В качестве примера рассмотрим возможность существования и свойства волновых решений в несжимаемой

$$\varrho=const, \qquad \operatorname{div}\vec{v}=0$$

электронейтральной проводящей среде

$$\varrho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\varrho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\vec{\nabla}p-\frac{1}{4\pi}\left[\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}\right]$$

в магнитном поле

$$\operatorname{div}\vec{H}=0$$

в квазистатическом случае

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\operatorname{rot}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right].$$

Предположим, что среда первоначально покоилась, а отклонения от исходного состояния достаточно малы:

$$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{h}, \qquad p=p_0+p_1,$$

где $h<<H_0$, $p_1<<p_0$ и носят волновой характер.

Будем искать решение системы линеаризованных уравнений

$$\operatorname{div}\vec{v}=0, \qquad \operatorname{div}\vec{h}=0,$$

$$\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}=\operatorname{rot}\left[\vec{v}\times\vec{H}_0\right] \quad \varrho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\vec{\nabla}p_1-\frac{1}{4\pi}\left[\vec{H}_0\times\operatorname{rot}\vec{h}\right]$$

в виде плоских волн

$$p_1=p'e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{h}=\vec{h}'e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{r}}, \qquad \vec{v}=\vec{v}'e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{r}}.$$

В этом случае операция дифференцирования сводится к умножению на соответствующее число, что приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{v}'\right)=0, \qquad \left(\vec{k}\cdot\vec{h}'\right)=0, \qquad -\omega\vec{h}'=\left[\vec{k}\times\left[\vec{v}\times\vec{H}_0\right]\right],$$

$$\varrho\omega\vec{v}'=\vec{k}p'+\frac{1}{4\pi}\left[\vec{H}_0\times\left[\vec{k}\times\vec{h}'\right]\right].$$

Раскрывая векторные произведения, получим систему:

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{v}'\right)=0, \qquad \left(\vec{k}\cdot\vec{h}'\right)=0, \qquad -\omega\vec{h}'=\vec{v}\left(\vec{k}\cdot\vec{H}_0\right),$$

$$\varrho\omega\vec{v}'=\vec{k}\left(p'+\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}_0\cdot\vec{h}'\right)\right)-\frac{1}{4\pi}\vec{h}'\left(\vec{H}_0\cdot\vec{k}\right).$$

Умножая скалярно последнее уравнение системы на $\vec{k}$ и учитывая первые два уравнения, получим систему:

$$p'+\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}_0\cdot\vec{h}'\right)=0, \qquad \varrho\omega\vec{v}'=-\frac{1}{4\pi}\vec{h}'\left(\vec{H}_0\cdot\vec{k}\right).$$

Система уравнений

$$-\omega\vec{h}'=\vec{v}\left(\vec{k}\cdot\vec{H}_0\right) \qquad \varrho\omega\vec{v}'=-\frac{1}{4\pi}\vec{h}'\left(\vec{H}_0\cdot\vec{k}\right)$$

имеет нетривиальное решение, если частота удовлетворяет условию:

$$\omega(k)=\frac{\left(\vec{H}_0\cdot\vec{k}\right)}{\sqrt{4\pi\varrho}}.$$

Это дисперсионное уравнение определяет групповую скорость волны, направленную вдоль поля $\vec{H}_0$:

$$\vec{V}_{гр}=\vec{\nabla}_k\omega\left(\vec{k}\right)=\frac{\vec{H}_0}{\sqrt{4\pi\varrho}}.$$

Возникающие волны являются поперечными, т.к. $\left(\vec{k}\cdot\vec{v}'\right)=0$ и $\left(\vec{k}\cdot\vec{h}'\right)=0$, а амплитуды возмущений магнитного поля, давления и скорости пропорциональны друг другу:

$$\vec{v}'=\mp\frac{\vec{h}'}{\sqrt{4\pi\varrho}}, \qquad p'=-\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}_0\cdot\vec{h}'\right).$$

Эти волны называются волнами Альфвена.