

Лекция 7. Методы расчета плоских течений

Потенциал и функция тока

В плоском течении уменьшается количество переменных, что существенно упрощает решение задач. Особенно просто найти решение для потенциального течения несжимаемой жидкости.

Пусть поле скоростей задано векторами в плоскости Oxy : $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$. Условие несжимаемости $div \vec{v} = 0$ потенциального течения $rot \vec{v} = 0$ позволяет выразить компоненты вектора скорости $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ в виде градиента скалярной функции $\vec{v} = grad \varphi$, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$.

Условие несжимаемости $div \vec{v} = 0$ в декартовых координатах $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ приводит к уравнению Лапласа для потенциала φ : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ или *условию гармоничности*.

Линии тока этого течения удовлетворяют условию $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$, которое можно записать в виде

$$-v_y dx + v_x dy = 0.$$

Это соотношение можно рассматривать, как условие в дифференциальной форме для функции $\psi(x, y)$, задающей линию $\psi(x, y) = const$ на плоскости Oxy

$$d\psi(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0.$$

При выполнении условий $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, касательная к этой линии совпадает с вектором скорости в каждой точке, поэтому функция $\psi(x, y)$ называется *функцией тока*.

Условие потенциальности течения $rot \vec{v} = 0$ накладывает ограничения на скорость:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0,$$

что приводит к условию $\Delta \psi = 0$ для функции тока.

Потенциал и функция тока связаны соотношениями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

т.е. являются сопряженными гармоническими функциями. Касательные к линиям $\varphi(x, y) = const$ и $\psi(x, y) = const$ в точке их пересечения взаимно перпендикулярны.

С помощью функции тока граничные условия для непроницаемых стенок формулируются как уравнение $\psi(x, y) = const$, т.е. непроницаемая граница является одной из линий тока.

Методы ТФКП.

Переходя к комплексным $z = x + iy$, операции с векторами можно заменить операциями с комплексными числами. Потенциальное течение в этом подходе описывается при помощи *комплексного потенциала* $w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$, который оказывается аналитической функцией, т.е. функцией, для которой производная по z определена в любой точке течения и не зависит от способа перехода к пределу /по переменным x и y /.

Независимость предела от способа стремления к нулю $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ двух

действительных переменных

$$w'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

приводит к условию Коши-Римана для комплексного потенциала

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что *любая аналитическая функция является комплексным потенциалом некоторого течения.*

Комплексная скорость. Комплексной скоростью \hat{v} называется производная от комплексного потенциала

$$\hat{v} = \frac{dw(z)}{dz}.$$

Действительная и мнимая ее части связаны с проекциями вектора скорости

$$\frac{d}{dz} w(z) = \frac{d}{dz} w(z) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x - i v_y.$$

Физические величины и комплексный потенциал.

В односвязной области D аналитическая функция $f(z)$ может быть проинтегрирована по любой кривой C , лежащей в этой области, причем значение интеграла определяется только положением точек a и b начала и конца кривой интегрирования:

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a).$$

Вычисляя интеграл от комплексной скорости $\hat{v} = \frac{dw(z)}{dz}$, получим

$$\int_C \hat{v}(z) dz = w(b) - w(a) = \int_C (v_x dx + v_y dy) + i \int_C (v_x dy - v_y dx).$$

Первый интеграл в правой части равенства - вклад от касательных составляющих вектора скорости вдоль кривой, а второй — вклад от перпендикулярных составляющих, определяющих *расход жидкости* Q через рассматриваемую кривую (плоскость в трехмерном пространстве), т.е. $Q = \psi(b) - \psi(a)$. Для замкнутого контура первый интеграл дает циркуляцию вектора скорости, а второй — расход жидкости.

Особые точки. Точки, в которых производная не существует, называются особыми точками функции (полюсы, существенные особые точки, точки ветвления).

Изолированные особые точки аналитических функций имеют простую физическую интерпретацию. Важнейшими являются точечный источник и вихревая нить.

1. *Точечный источник* - создает поле скоростей, поток которого через любую поверхность, окружающую его, постоянен. Для источника интенсивностью I в начале координат поле скоростей (из уравнения непрерывности) - $v_r(r) = \frac{I}{2\pi r}$.

В векторной форме

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r = v_r \frac{\vec{r}}{r} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{r}.$$

Вводя $z = x + iy = re^{i\theta}$, выражение для комплексной скорости можно записать в виде:

$$\hat{v} = v_x - i v_y = \frac{I}{2\pi |z|^2} z^* = \frac{I}{2\pi z}.$$

Интегрирование дает комплексный потенциал $w(z) = \frac{I}{2\pi} \int \frac{dz}{z} = \frac{I}{2\pi} \text{Ln} z$.

2. Вихрь (вихревая нить) - создает индуцированное поле скоростей $\vec{v} = v_\vartheta \vec{e}_\vartheta$. Из

условия потенциальности потока $\text{rot} \vec{v} = 0$ или $(\vec{n}_3 \cdot \text{rot} \vec{v}) = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(v_\vartheta r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right\} = 0$ при

заданной циркуляции Γ зависимость скорости от расстояния до нити $v_\vartheta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$.

Для $z = x + iy = re^{i\vartheta}$ получим выражение для комплексной скорости

$\hat{v} = v_x - iw_y = \frac{\Gamma}{2\pi iz}$ и комплексного потенциала вихревой нити $w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \int \frac{dz}{z} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln} z$.

Комплексные потенциалы, важные для приложений

Основные потенциалы, используемые в приложениях, приведены в таблице.

Течение	Линии тока	Комплексный потенциал	Комплексная скорость
Однородный поток под углом α к оси Ox		$w(z) = Uze^{-i\alpha}$	$\hat{v}(z) = Ue^{-i\alpha}$
Обтекание угла $\alpha = \frac{\pi}{n}$		$w(z) = Uz^n$	$\hat{v}(z) = Unz^{n-1}$ $\hat{v}(0) = 0$ при $n > 1$, $\hat{v}(0) \rightarrow \infty$ при $n < 1$,
Обтекание круглого цилиндра радиуса R		$w(z) = U \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$	$\hat{v}(z) = U \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$
Обтекание круглого цилиндра радиуса R с циркуляцией Γ .		$w(z) = U \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln} z$	$\hat{v}(z) = U \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi iz}$
Источник интенсивностью I в точке z_0		$w(z) = \frac{I}{2\pi} \text{Ln}(z - z_0)$	$\hat{v}(z) = \frac{I}{2\pi(z - z_0)}$
Вихревая нить интенсивностью Γ в точке z_0		$w(z) = \frac{I}{2\pi i} \text{Ln}(z - z_0)$	$\hat{v}(z) = \frac{I}{2\pi i(z - z_0)}$

Конформные отображения и задача Дирихле.

Аналитические функции комплексного переменного $z = f(\zeta)$ осуществляют конформное отображение комплексной плоскости ζ на плоскость z . При этом сохраняются углы между отрезками в окрестности каждой точки, т. е. преобразование сводится к равномерному растяжению и повороту элементарной фигуры.

При конформных преобразованиях решение уравнения Лапласа для потенциала и функции тока переходит в решение уравнения Лапласа в новых переменных, а граница области подвергается деформациям.

Если удастся найти конформные отображения известного потенциального течения несжимаемой жидкости в области с простой границей в область с границей «сложной» формы, то таким путем удастся определить течение в этой области.

Пример 1. Поток в пространстве, ограниченном углом

Поле скоростей плоского потенциального течения идеальной жидкости в пространстве, ограниченном стенками, составляющими угол 60° . На большом расстоянии от угла поле скоростей однородно.

Потенциальное течение жидкости в полупространстве $-\infty < x < +\infty, y > 0$ вдоль оси Ox можно задать потенциалом $\phi(x, y) = Vx$. Функция тока такого течения $\psi(x, y) = Vy$. Следовательно, комплексный потенциал этого течения $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = Vz$.

Отображение $z(\zeta) = a\zeta^3$, где a — действительная константа, преобразует границу области $y = 0$ на плоскости $z = x + iy$ в угол с вершиной в начале координат в переменных $\zeta = \xi + i\eta$. При этом бесконечно удаленные точки переходят в бесконечно удаленные.

Это приводит к выражению комплексного потенциала в новых переменных

$$w(z(\zeta)) = \Phi(\zeta) + i\Psi(\zeta) = Va\zeta^3.$$

Действительная часть комплексного потенциала на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ является потенциалом скорости искомого течения, а мнимая часть — функцией тока:

$$\Phi = -Va\xi(\xi^2 - 3\eta^2), \quad \Psi = -Van(3\xi^2 - \eta^2).$$

Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа в новых переменных:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} = -Va(6\xi - 6\xi) = 0, \quad \Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} = -Va(6\eta - 6\eta) = 0.$$

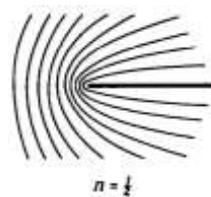
Поле скоростей в новых переменных определяется проекциями

$$v_\xi = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = -3Va\xi(\xi^2 - \eta^2) \quad v_\eta = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = -6Va\xi\eta.$$

и характеризуется линиями тока, определяемыми из условия

$$\Psi(\xi, \eta) = -Van(3\xi^2 - \eta^2) = C.$$

В частности, при $C = 0$ линии тока $\eta = 0$ и $\eta = \xi\sqrt{3}$ совпадают с границами области, образующими между собой угол 60° : $\operatorname{tg}60^\circ = \frac{\eta}{\xi} = \sqrt{3}$. /Рассмотреть примеры для $n = 2/3$ (обтекание внешнего угла 90°) и $n = 1/2$ (обтекание пластины)/.



Пример 2. Обтекание кругового цилиндра.

Конформное отображение (отображение Жуковского) $z = f(\zeta) = \zeta + \frac{R^2}{\zeta}$ плоскости $z = x + iy$ на плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, где $\zeta = re^{i\theta}$ - комплексное число, преобразует границу области — окружность радиуса R на плоскости ζ в отрезок прямой $|x| < 2R, y = 0$ на плоскости z . Соответственно, точки области вне круга радиуса $r = R(1 + \delta), \delta \ll 1$ преобразуются в точки эллипса с полуосями $a = 2R, b = 2R\delta$ (см. рис.) Соответствие точек окружности на плоскости W и точек отрезка $|x| < 2R, y = 0$ на плоскости Z указано на рисунке.

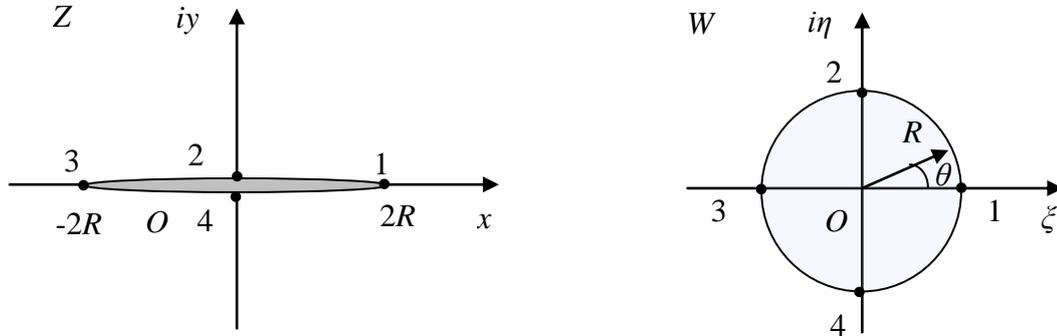


Рис. 1

Обратное преобразование осуществляется функцией $\zeta = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - R^2}$,

удовлетворяющей уравнению $\zeta^2 - z\zeta + R^2 = 0$. Выбор знака обеспечивает отображение верхней полуплоскости Z в верхнюю полуплоскость ζ .

Однородный поток, параллельный пластинке, не искажается ей, и его поле скоростей описывается потенциалом $\phi(x, y) = U_0 x$ и функцией тока $\psi(x, y) = U_0 y$. Комплексный потенциал этого потока $w(z)$ на плоскости $z = x + iy$:

$$w(z) = \phi(z) + i\psi(z) = U_0(x + iy) = U_0 z.$$

Для вычисления поля скоростей потенциального потока, обтекающего цилиндр, воспользуемся конформным отображением $z = \zeta + \frac{R^2}{\zeta}$, которое приводит к потенциалу w , зависящему от ζ :

$$w(z(\zeta)) = U_0 \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right).$$

Выделяя действительную и мнимую части, получим выражения для потенциала и функции тока этого течения в переменных ξ, η :

$$w(\zeta) = U_0 r \left(e^{i\theta} + \frac{R^2}{r^2} e^{-i\theta} \right) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta),$$

где $\Phi(\xi, \eta), \Psi(\xi, \eta)$ - действительные функции от ξ, η . Действительная и мнимая части комплексного потенциала – потенциал и функция тока потока, обтекающего цилиндр

$$\Phi(\xi, \eta) = U_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \quad \Psi(\xi, \eta) = U_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right).$$

Скорость потока на бесконечности направлена вдоль оси Ox (см. рис. 2а).

Отсюда скорость потока в цилиндрических координатах:

$$v_r = \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad v_\theta = \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{r \partial \theta} = -U_0 \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right),$$

и линии тока $\Psi(\xi, \eta) = U_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) = C$.

Пример 3. Пластина под углом к потоку.

Полученный результат допускает обобщение на случай потока, составляющего угол α с осью абсцисс. В пространстве переменных $\zeta = \xi + i\eta$ характер обтекания цилиндра не зависит от направления потока, а потому достаточно провести замену в комплексном потенциале $\theta \rightarrow \theta - \alpha$ (см. рис. 2).

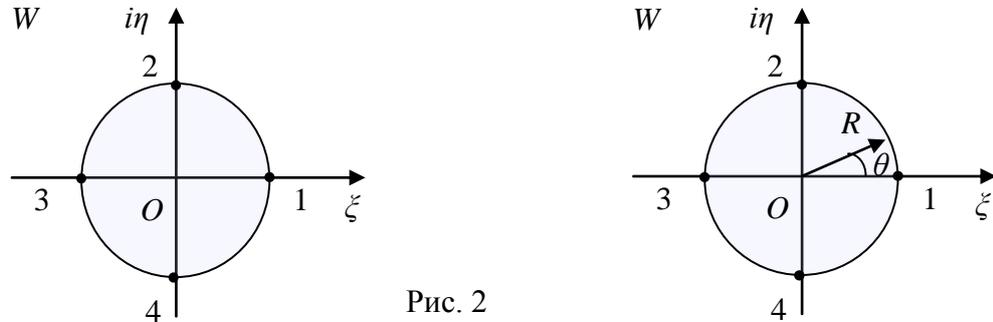


Рис. 2

В силу цилиндрической симметрии граничных условий, получившееся при замене выражение для потенциала и функции тока вновь удовлетворяет им на поверхности цилиндра. Но комплексный потенциал такого потока изменится по сравнению с исходным:

$$w(z(\zeta)) = U_0 \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right) \rightarrow \hat{\Phi}_1(\zeta) = U_0 r \left(e^{i(\theta-\alpha)} + \frac{R^2}{r^2} e^{-i(\theta-\alpha)} \right)$$

или

$$\hat{\Phi}_1(\zeta) = U_0 \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right).$$

Для определения поля скоростей пластинки, расположенной под углом к потоку, запишем комплексный потенциал в переменных $z = x + iy$. Подставляя в $\hat{\Phi}_1(\zeta)$

$$\zeta = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - R^2}, \quad \frac{R^2}{\zeta} = z - \zeta = \frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} - R^2},$$

получим выражение в переменных x, y :

$$\hat{\Phi}_1(z) = U_0 \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right) = U_0 \left(z \cos \alpha - i \sin \alpha \sqrt{z^2 - 4R^2} \right).$$

Комплексная скорость потока в любой точке определяется выражением

$$\hat{v}(z) = \frac{d\hat{\Phi}_1(z)}{dz} = v_x - iv_y$$

или

$$\hat{v}(z) = U_0 \left(\cos \alpha - i \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4R^2}} \sin \alpha \right).$$

На поверхности пластины $-2R < x < 2R, y = 0$ имеются критические точки потока, в которых скорость обращается в ноль:

$$\hat{v}(x) = U_0 \left(\cos \alpha - i \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4R^2}} \sin \alpha \right) = 0.$$

Координаты критических точек $x_{1,2} = \pm 2R \cos \alpha$ являются корнями уравнения. На концах пластины при $x = \pm 2R$ скорость потока бесконечна.

Потенциал и функция тока даются выражениями:

$$\phi(x, y) = \text{Re } \Phi_1(z) = U_0 \text{Re} \left(z \cos \alpha - i \sqrt{z^2 - 4R^2} \sin \alpha \right)$$

$$\psi(x, y) = \text{Im } \Phi_1(z) = U_0 \text{Im} \left(z \cos \alpha - i \sqrt{z^2 - 4R^2} \sin \alpha \right),$$

На рис. 3а изображены линии тока для $\alpha = \pi / 6$, а на рис. 3б – линии тока для пластинки, перпендикулярной потоку $\alpha = \pi / 2$.

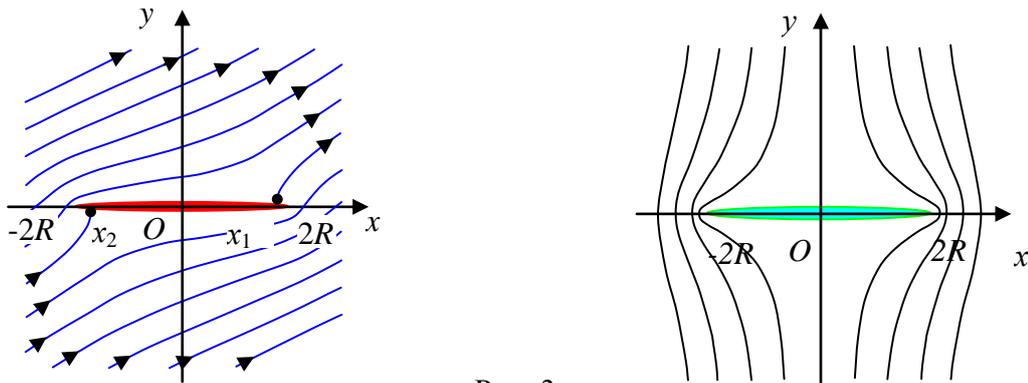


Рис. 3

Потенциальный поток такого вида не наблюдается, но наблюдается поток, близкий к потенциальному, не имеющий особенности в точке схода потока с задней кромки пластины. Удовлетворить этому условию в рассматриваемой модели можно, добавив циркуляцию потока вокруг пластины:

$$\hat{\Phi}_2(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - R^2} \right).$$

В результате получим выражение для *потенциального потока с циркуляцией* Γ :

$$\hat{\Phi}_0(z) = V_0 \left(z \cos \alpha - i \sin \alpha \sqrt{z^2 - 4R^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 4R^2} \right).$$

Выбором параметра Γ устраним особенность скорости на задней кромке пластины.

Условие $\left. \frac{d\hat{\Phi}_0(z)}{dz} \right|_{x=2R} = 0$ определяет циркуляцию потока $\Gamma = -2\pi \cdot 4RU_0 \sin \alpha$.

Указанная процедура согласования модели с наблюдаемыми явлениями называется **постулатом Чаплыгина-Жуковского**.

Поток, обтекающий пластинку, имеет такую циркуляцию, что его критическая точка совпадает с точкой его отрыва от пластинки.

На рис. 4 изображены линии тока вокруг пластинки, наклоненной под углом $\alpha = \pi / 6$ к вектору скорости потока на бесконечности.

Замечание.

Циркуляция потока определяет силу, действующую на пластинку /теорема Жуковского/: $F^* = F_x - iF_y = i\rho v_\infty \Gamma$. (Доказательство дать самостоятельно).

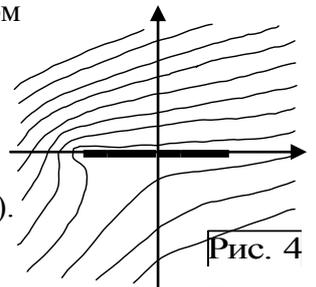


Рис. 4

Теорема имеет простой физический смысл: для вычисления подъемной силы пластинки следует определить разность давлений на верхнюю и нижнюю поверхности $\Delta p = p_2 - p_1$. Воспользуемся уравнением Бернулли, связывающим эту разность со скоростями потока, обтекающего верхнюю и нижнюю поверхность: $\Delta p = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$. При малой разности скоростей это выражение приводит к силе, пропорциональной длине пластинки l :

$$F_y = \Delta p S = \Delta p l b = \rho b (v_2 - v_1) l \frac{v_2 + v_1}{2} = \rho b \Gamma v. \text{ Здесь } b - \text{«ширина» пластинки } b \gg l.$$

Отсюда «удельная» подъемная сила, приходящаяся на единицу «ширины» пластинки совпадает с выражением, полученным из теоремы Жуковского.

В случае пластинки, наклоненной под углом к потоку,

$$F_x = -2\pi\rho v_0^2 2R \sin^2 \alpha \qquad F_y = 2\pi\rho v_0^2 2R \sin \alpha \cos \alpha .$$