Лекция 07.11.11.
Вариационные методы в МСС.

Метод Лагранжа — метод построения и интегрирования уравнений движения точки. Эффективно работает в системах, где имеются потенциальные (обобщенно-потенциальные) силы. Применим в системах с идеальными голономными связями.

Перечислим основные достоинства подхода.

1. Возможность построения системы скалярных уравнений — проекций на заданные направления для произвольных локальных векторов $\delta\vec{r}$, задающих направления в любой точке. Особенно просто, если эти направления порождаются обобщенными координатами $\vec{r} = \vec{r}(q_k, t)$, так что $\delta\vec{r} = \dfrac{\partial\vec{r}(q_k, t)}{\partial q_i} q_i$ /точечные преобразования/.
2. Построение системы уравнений становится тривиальным, если рассматриваются только потенциальные силы $rot\vec{F}(\vec{r}, t) = 0$.
3. Эффективен для построения уравнений в системах с *голономными связями* $f_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_j, t) = 0$, позволяя описывать особый тип воздействия на систему путем задания уравнений связей /возможно, зависящих от времени/, а также формально исключить уравнения связей путем введения обобщенных координат.
4. В системах с *идеальными связями* позволяет максимально просто исключать силы реакции таких связей в самом начале процедуры (в отличие от метода неопределенных множителей Лагранжа), учитывая действие связей при помощи геометрических методов (задания нетривиальной метрики). Напомним, что реакциями связей называются силы $\vec{R}_i$, действующие на точки системы, но не заданные явно с помощью их зависимостей от координат, скоростей или времени. Задание таких сил осуществляется путем наложения ограничений на взаимное расположение точек (голономные связи) или на их скорости (неголономные связи). Связи называются *идеальными*, если виртуальная работа всех реакций связей на любых виртуальных перемещениях равна нулю $\sum_i \left(\vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right) = 0$.
5. Метод Лагранжа позволяет установить существование первых интегралов системы уравнений, даже не выписывая самих уравнений в явном виде, а также вычислить эти интегралы (обобщенные импульсы и энергия).
6. Метод позволяет установить связь между существованием интегралов движения и динамическими симметриями задачи, включая нетривиальные симметрии (калибровочные преобразования).

Представляет интерес анализ возможностей применимости такого подхода к задачам МСС с целью упрощения построения и анализа решений уравнений сплошной среды. Мы попытаемся оценить возможности использования подхода для решения следующих проблем:

1. Получения уравнений движения (и других уравнений /уравнения непрерывности, термодинамических уравнений состояния и процессов/) в произвольных криволинейных координатах.
2. Исследования структуры динамических уравнений, в частности, характера сил реакций в идеальных системах.
3. Возможности описания динамики неголономных систем в МСС и учета дополнительных ограничений на характер движения, вытекающих из уравнений термодинамики и непрерывности.
4. Возможности описания «несилового» воздействия на систему /учет граничных условий/ в МСС
5. Выявление интегралов уравнений МСС на основе симметрий системы.

Упругая сплошная среда /Лагранжево описание/

Простейший случай — распространение метода Лагранжа на механику деформируемого твердого тела - упругой сплошной среды. Пусть это - брусок сечением S, ориентированный вдоль оси Ox. Плотность вещества ρ, а модуль Юнга – E. Дискретной моделью среды является цепочка одинаковых точечных масс m_i, соединенных невесомыми пружинами, длина которых в недеформированном состоянии равна l. Тогда каждая масса $m = \rho l S$, а сила упругости пружины $F = k\Delta l = \dfrac{ES}{l}\Delta l$. При

Рис. 7. Цепь точек, заменяющих упругое тело.

одномерном движении вдоль Ox отклонение от положения равновесия *каждой* массы m_i описывается соответствующей обобщенной координатой q_i, вводимой соотношением $x_i(t) = x_i(0) + q_i(t)$, где $x_i(0) = il$ - равновесное положение i – точки.

Уравнение движения массы m_i имеет вид:

$$m\ddot{q}_i = k\left[(q_{i+1} - q_{i-1}) - (q_i - q_{i-1})\right]$$

или

$$\rho l \ddot{q}_i = \frac{E}{l}\left[(q_{i+1} - q_{i-1}) - (q_i - q_{i-1})\right].$$

В непрерывной среде $q_i \to q(x)$, так что $q_{i+1} - q_i = q(x+l) - q(x) = \dfrac{\partial q}{\partial x} l$, а

$$(q_{i+1} - q_{i-1}) - (q_i - q_{i-1}) = l^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

Уравнение движения этой среды

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2},$$

является волновым уравнением со скоростью волны $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

Функция Лагранжа системы

$$L = T - U = \sum_i \left[\frac{1}{2} m\dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}(q_{i+1} - q_i)^2\right] = \sum_i L_i,$$

где $L_i = \dfrac{m}{2}\dot{q}_i^2 - \dfrac{k}{2}(q_{i+1} - q_i)^2 = \dfrac{\rho l S}{2}\dot{q}_i^2 - \dfrac{ES}{2l}(q_{i+1} - q_i)^2$,

позволяет записать уравнения движения в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

которая возникает в вариационной задаче об экстремуме функционала

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0$$

(вариационный принцип Гамильтона-Остроградского), если варьирование осуществляется при фиксированных начальных и конечных точках

$$\delta q_i(t_2) = \delta q_i(t_1) = 0.$$

Функции Лагранжа системы точек

$$L = \sum_i \left[\frac{m}{2}\dot{q}_i^2 - \frac{k}{2}(q_{i+1} - q_i)^2\right] = \sum_i L_i,$$

переходит в функцию непрерывной среды, если учесть соотношения

$$\frac{m}{2}\dot{q}_i^2 = \frac{\rho l S}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2, \qquad \frac{k}{2}(q_{i+1}-q_i)^2 = \frac{k}{2}\left(l\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 = \frac{ElS}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2,$$

$$L_i = \frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right\}lS \qquad L = \sum_i L_i = \int \frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right\}Sdx = \int \mathcal{L}dV$$

где $dV = Sdx$ - элементарный объем, а функция

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}) = \frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right\}$$

называется плотностью функции Лагранжа или *лагранжианом*.

Отметим, что суммирование заменяется интегрированием по *начальным координатам* частиц, когда осуществлялось упорядочивание по дискретным номерам.

Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского для упругой сплошной среды имеет вид:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int \mathcal{L}(q, q', \dot{q}, t)\,dxdt = 0.$$

В отличие от системы материальных точек, в лагранжиан входят не только обобщенные координаты и скорости, но и производные от обобщенных координат по пространственным переменным.

Выполним варьирование функционала, учитывая возможную зависимость лагранжиана от обобщенных координат и времени:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int \mathcal{L}(q, q', \dot{q}, t)\,dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}\delta q' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right)dxdt.$$

Независимость операции варьирования от дифференцирования позволяет изменить порядок выполнения этих опреаций

$$\delta q' = \delta\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\delta q, \qquad \delta \dot{q} = \delta\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\delta q.$$

Интегрируя по частям второе и третье слагаемое, получаем:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int \mathcal{L}(q, q', \dot{q}, t)\,dxdt = -\int_{t_1}^{t_2}\int\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\right]\right\}\delta q\,dxdt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}\delta q\Big|_{x_B} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}\delta q\Big|_{x_A}\right)dt + \int_{x_A}^{x_B}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q\Big|_{t_1}\right)dx.$$

В соответствии с принципом Гамильтона-Остроградского потребуем выполнения условий $\delta q(x, t_2) = \delta q(x, t_1) = 0$. Если их дополнить условиями на пространственной границе области $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}\Big|_{x_A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}\Big|_{x_B} = 0$, соответствующими отсутствию возмущений, то необходимые и достаточные условия обращения вариации в нуль приводят к уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

Здесь $q' = \frac{\partial q}{\partial x}$, $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$.

Для лагранжиана

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}) = \frac{1}{2}\left\{\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right\}$$

полученное уравнение является волновым.

Действительно, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}=0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}=-Eq'=-E\frac{\partial q}{\partial x}$, а $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}=\rho\dot q=\rho\frac{\partial q}{\partial t}$.
Выполняя теперь оставшееся дифференцирование, получим уравнение движения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Eq)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho q)=0.$$

В пространственной задаче $x_i=(x_1,x_2,x_3)$ и вариация функционала

$$\delta\int L dt=\delta\int\int_V \mathcal{L} dV dt=0$$

приводит к уравнениям движения

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_{ki}}=0.$$

Здесь $i,k=1,2,3$. Вводя обозначение

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_{ki}}$$

($\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k}$ - функциональная производная от $\mathcal{L}$), уравнения можно привести к виду, напоминающему уравнения Лагранжа механики материальных точек:

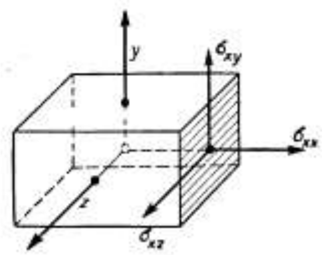
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_k}-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k}=0.$$

Наивное обобщение модели связанных пружин на трехмерный случай предполагает выражение для плотности энергии упругой деформации вида

$$w=\frac{E}{2}\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial q_3}{\partial x_3}\right)^2\right\},$$

однако такая модель не соответствует наблюдаемому характеру деформаций.

Напряжения и деформации. Симметричный тензор напряжений σ_{ik} устанавливает связь между элементарной силой df_i и элементарной площадкой ds_k:



$$df_i=\sigma_{ik}ds_k.$$

Деформации среды мы характеризовали симметричным тензором скоростей деформаций $S_{ki}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$, который определяет скорость изменения расстояния между соседними точками сплошной среды. Для описания деформаций твердого тела в статике удобно ввести симметричный тензор, характеризующий относительное увеличение расстояния между точками $\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k}+\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\right)$ *тензор деформаций.*

Если деформации, вызванные мехническими напряжениями пропорциональны им, можно установить связь между тензором напряжений и тензором деформаций.

$$\sigma_{ik}\sim\varepsilon_{ik},$$

Два симметричных тензора в одной точке можно одновременно привести к диагональному виду соответствующим выбором координат:

$$\sigma_{ik}=\begin{pmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\\0&0&\sigma_3\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_{ik}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_2&0\\0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}.$$

Для изотропной среды при изотропном сжатии естественно предполагать, что пропорциональность тензоров задается единственным скаляром – модулем упругости, так что $\sigma_{11} = \lambda\varepsilon_{11}$, $\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{22}$, $\sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{33}$, а инвариантная величина $\varepsilon_{kk} = e = div\vec{q} = \frac{\Delta V}{V}$ определяет относительное изменение объема. Если рассматривать изотропное сжатие, то $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{e}{3}$, так что тензор деформаций в выбранных координатах имеет вид $\varepsilon_{ik} = -\frac{e}{3}\delta_{ik}$. Такие деформации могут быть вызваны воздействием газа или жидкости для которого $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, а связь между напряжением и деформацией

$$\sigma_{ik} = \lambda e_{ik}$$

Если на тело действуют силы, растягивающие его вдоль оси *Ox*, а силы вдоль осей *Oy* и *Oz* равны нулю, то растяжение вдоль оси *Ox* приводит к сжатию тела во взаимно-перпендикулярных направлениях, поэтому

$$\sigma_1 = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 .$$

Механизм явления ясен, например, в модели полимерных молекул, свернутых в клубок.

Для изотропной среды деформации в направлениях, перпендикулярных действующей силе, одинаковы, т.е. $b = c$, поэтому соотношение имеет вид

$$\sigma_1 = (a-b)\varepsilon_1 + b(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (a-b)\varepsilon_1 + be .$$

Такая форма удобна тем, что использует инвариант тензора относительной деформации

$$e = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = div\vec{q} .$$

Другой инвариант этого тензора – свертка $\varepsilon^2 = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik}$.

Введение тензора объемной деформации позволяет формально связать тензор напряжения и тензор деформации соотношением, содержащим два скалярных коэффициента λ – модуль упругости, а μ – модуль сдвига. В системе координат, локально диагонализующей оба тензора, связь имеет вид

$$\sigma_i = 2\mu\varepsilon_i + \lambda e ,$$

а ее обобщение для произвольной системы

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda e\delta_{ik} .$$

Тензор деформаций можно инвариантным образом разбить на две части – всестороннего сжатия, изменяющего объем, и деформаций сдвига, оставляющих объем неизменным

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{3}\delta_{ik}e + \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}e\right).$$

Используя это разделение, запишем связь между тензором деформаций и тензором напряжений, вводя две константы, характеризующие эти два типа деформаций – модуль всестороннего сжатия *K* и модуль сдвига μ:

$$\sigma_{ik} = Ke\delta_{ik} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{e}{3}\delta_{ik}\right),$$

где $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$.

Модуль упругости и модуль Юнга. Удлинение Δl упругого однородного стержня длиной l и сечением *S* под действием приложенной вдоль него силы *F* определяется законом Гука

$$F = k\Delta l = E\frac{S}{l}\Delta l ,$$

где упругие свойства стержня характеризуются модулем Юнга Е. Учитывая связь $F = \sigma S$, получим для относительной деформации $\varepsilon = \Delta l / l$ соотношение $\sigma = E\varepsilon$.

Но удлинение стержня приводит к его поперечному сжатию, которое характеризуется величиной относительной поперечной деформации ε'. Отношение поперечного сжатия к продольному удлинению называется *коэффициентом Пуассона* $\nu = \frac{|\varepsilon'|}{\varepsilon}$, связывающим сжатие с продольным напряжением $\varepsilon' = -\frac{\nu}{E}\sigma$.

Для линейной зависимости справедлив принцип суперпозиции, в соответствии с которым произвольная деформация – это наложение взаимно-перпендикулярных деформаций. Деформация вдоль оси *Ox* зависит не только от напряжения вдоль этой оси, но и от поперечных напряжений (вызывающих сжатие вдоль оси *Ox*), поэтому

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

что допускает обобщение

$$\varepsilon_i = \frac{1+\nu}{E}\sigma_i - \frac{\nu}{E}\sigma,$$

где $\sigma = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ - инвариант тензора напряжений.

Отсюда устанавливается соотношение между инвариантами *e* и σ $\sigma = \frac{E}{1-2\nu}e$, связывающее напряжения и деформации

$$\sigma_i = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_i + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right) = 2\mu\varepsilon_i + \lambda e.$$

Сравнивая коэффициенты при *e* и ε_i, получим соотношения для λ и μ через *E* и ν:

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

При всестороннем сжатии образца под действием давления *p*

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{e}{3},$$

поэтому связь между давлением и деформацией принимает вид

$$p = \frac{Ee}{3(1-2\nu)} = eK,$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0$ – модуль всестороннего сжатия.

Энергия упругой деформации. Выражение для плотности энергии упругой деформации, обобщающее известный элементарный результат $U = \frac{1}{2}F\Delta x$, может быть получено как свертка тензоров напряжений и относительной деформации:

$$w = \frac{1}{2}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik} = \frac{2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda e\delta_{ik}}{2}\varepsilon_{ik} = \mu\varepsilon^2 + \frac{\lambda}{2}e^2,$$

Или

$$w = \frac{1}{2}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik} = \mu\varepsilon^2 + \frac{\lambda}{2}e^2 = \mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{e}{3}\delta_{ik}\right)^2 + \frac{Ke^2}{2}.$$

Запишем подробнее

$$w = \mu\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2\right) + 2\mu\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2\right) + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2.$$

Учитывая соотношения $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, получим окончательно:

$$w = \frac{1}{2}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\varepsilon^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}e^2\right).$$

При всестороннем сжатии $\varepsilon^2 = 3\varepsilon_1^2 = \dfrac{e^2}{3}$ плотность энергии упругой деформации

$$w = \frac{1}{2}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik} = \frac{Ee^2}{6(1-2\nu)} = \frac{E}{6(1-2\nu)}\left(div\vec{q}\right)^2.$$

Для устойчивости состояния равновесия эта величина должна быть положительной, что накладывает ограничение на величину коэффициента Пуассона $\nu < 1/2$.

Переходя к исходным обозначениям, запишем плотность энергии в виде

$$w = \frac{1}{2}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\varepsilon^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}e^2\right),$$

что приводит к лагранжиану для упругой среды

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right)^2 - \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\varepsilon^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}e^2\right).$$

Уравнение движения упругой среды.

Лагранжиан приводит к уравнениям движения твердого тела. Поскольку явная зависимость от координат отсутствует $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$, вариационная производная упрощается:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q_k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'_{ki}} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'_{ki}}$$

Для вычисления производных воспользуемся соотношением $\varepsilon_{ik} = \dfrac{q'_{ik} + q'_{ki}}{2}$ и продифференцируем выражения

$$\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial q'_{ik}} = \frac{\partial\left(\varepsilon_{mn}\varepsilon_{mn}\right)}{\partial q'_{ik}} = 2\varepsilon_{mn}\frac{\partial\varepsilon_{mn}}{\partial q'_{ik}} = 2\varepsilon_{mn}\delta_{im}\delta_{kn} = 2\varepsilon_{ik}$$

$$\frac{\partial e^2}{\partial q'_{ik}} = \frac{\partial\left(\varepsilon_{nn}\right)^2}{\partial q'_{ik}} = 2e\frac{\partial\varepsilon_{nn}}{\partial q'_{ik}} = 2e\delta_{in}\delta_{in} = 2e\delta_{ik}$$

Теперь дифференцирование лагранжиана дает

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'_{ik}} = -\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\delta_{ik}\right).$$

Подставляя сюда $\varepsilon_{ik} = \dfrac{q'_{ik} + q'_{ki}}{2}$, $e = q'_{kk}$ и дифференцируя по координатам, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'_{ik}} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\delta_{ik}\right)$$

Выполняя дифференцирование, учтем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(graddiv\vec{q} + \Delta\vec{q}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{nn} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial q_n}{\partial x_n}\right) = graddiv\vec{q},$$

В итоге получим уравнения движения

$$\rho\frac{\partial^2\vec{q}}{\partial t^2} - \frac{E}{(1+\nu)}\left(\Delta\vec{q} + \frac{\nu}{1-2\nu}graddiv\vec{q}\right) = 0.$$

Волновые уравнения.

Полученные уравнения описывают два типа волн – волны сжатия, для которых $div\vec{q} \neq 0$ и волны сдвига, для которых $div\vec{q} = 0$. Введем скалярную величину, характеризующую сжатие $\vartheta = div\vec{q}$ и вычислим *div* от уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial t^2} - \frac{E}{(1+\nu)} \left(\Delta\vec{q} + \frac{\nu}{1-2\nu} graddiv\vec{q} \right) = 0,$$

учитывая соотношение $graddiv\vec{q} = \Delta\vec{q} + rotrot\vec{q}$:

$$\rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \frac{E}{(1+\nu)} \left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \Delta\vartheta = 0.$$

Отсюда следует, что продольные волны сжатия распространяются со скоростью

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

Для описания волны сдвига введем $\vec{b} = rot\vec{q}$ вычислим *rot* от уравнения:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} - \frac{E}{(1+\nu)} \Delta\vec{b} = 0.$$

Поперечные волныкручения $\vec{b} = rot\vec{q}$ распространяются со скоростью

$$c_2^2 = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{(1+\nu)} = \frac{\mu}{\rho}.$$

Для железа $\nu = 0{,}3$, так что $c_1 / c_2 = 1{,}87$

Замечание. Кроме пространственных в твердом теле существуют *поверхностные волны*.

Энергия и гамильтониан

Вновь вернемся к системе N материальных точек. Обобщенные импульсы вводятся соотношением:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1,\dots,N.$$

Если координата $i = s$ является циклической $\dfrac{\partial L}{\partial q_s} = 0$, то есть функция Лагранжа инвариантна относительно трансляции по этой переменной, то из уравнений движения $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = 0$ соответствующий импульс сохраняется: $p_s = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = const$.

Для сплошной среды вводится аналог обобщенного импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = l \frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i} \to \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} dx,$$

пропорциональный элементарному объему *dx*.

Величина $\pi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ называется плотностью импульса.

Уравнения движения для плотности импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = 0.$$

Так же по аналогии с системой точек вводится обобщенная энергия сплошной среды

$$E^* = p_k \dot{q}_k - L.$$

Выражая ее через плотности импульсов, введем плотность функции Гамильтона или *гамильтониан*.

$$H = \int \mathcal{H} dV, \text{ где } \mathcal{H} = \pi \dot{q}(\pi, q) - \mathcal{L}.$$

Дифференциал от гамильтониана имеет вид

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} dq + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'} dq' + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt .$$

Здесь, в отличие от механики точек, появляются переменные q'.

С другой стороны, вычисляя дифференциал из определения гамильтониана, получим

$$d\mathcal{H} = \pi d\dot{q} + \dot{q} d\pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} dq' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} dx - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt =$$

$$= \dot{q} d\pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} dq' - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} dx - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Приравнивая коэффициенты при независимых переменных, получим систему уравнений:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} .$$

Уравнения движения теперь можно записать в виде гамильтоновых уравнений

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi},$$

поскольку $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi'} = 0$.

Изменение гамильтониана со временем $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \left(\dot{\pi} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'} \dot{q}'$.

Энергия и импульс сплошной среды.

Чтобы изучить характер изменения гамильтониана – плотности обобщенной энергии, вернемся к лагранжиану, используя уравнения

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_{ki}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k},$$

так что

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_{ki}}$$

Выражение для скорости изменения гамильтониана приводится теперь к виду

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_{ik}} \right) \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_{ik}} \dot{q}'_{ik} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_k},$$

где $\zeta_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_{ik}} \frac{\partial q_i}{\partial t}$.

Если $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, то $\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_k} = 0$.

Поскольку гамильтониан является плотностью энергии, полученное уравнение рассматривается, как закон сохранения энергии, где ζ_k – вектор плотности потока энергии.

Преобразование $\zeta'_k = \zeta_k + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$ для любого вектора A_k не меняет закон сохранения.

Можно показать, что для любых величин ξ_k вида $\xi_k = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} q'_{ik}$ выполняется соотношение

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_{km}} \frac{\partial q_m}{\partial x_i} - \delta_{ik} \mathcal{L} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} .$$

Если лагранжиан не зависит от координат, то

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k'^{\,m}}\frac{\partial q_m}{\partial x_i}-\delta_{ik}\mathcal{L}\right)=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}.$$

Здесь введен тензор

$$T_{ik}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{km}'}\frac{\partial q_m}{\partial x_i}-\delta_{ik}\mathcal{L}.$$

Уравнение Эйлера как вариационный принцип. (Зоммерфельд)

Несжимаемая жидкость описывается простейшей системой уравнений

1. условием несжимаемости $div\vec{v}=0$
2. уравнением Эйлера $\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\vec{g}$.

Уравнение Эйлера для несжимаемой жидкости можно получить как следствие уравнение Ньютона для элементарной частицы массой $\Delta m=\rho\Delta V$:

$$\Delta m\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{\nabla}p\Delta V+\Delta m\vec{g}.$$

Скалярные уравнения - проекции на направляющие векторы $\delta\vec{r}\left(\vec{r}\right)$, заданные в каждой точке пространства, получаются в результате вычисления скалярных произведений:

$$\left(\delta\vec{r}\cdot\frac{d\rho\vec{v}}{dt}\right)=-\left(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}p\right)+\left(\rho\vec{g}\cdot\delta\vec{r}\right).$$

Слагаемое $\left(\rho\vec{g}\cdot\delta\vec{r}\right)$ удобно записать в виде $\delta\left(\rho\vec{g}\cdot\vec{r}\right)=-\delta U\left(\vec{r}\right)$, где $U\left(\vec{r}\right)$ - объемная плотность потенциальной энергии элементарной частицы.

Аналогично можно представить $\left(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}p\right)$:

$$\left(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}p\right)=\delta p\left(\vec{r}\right).$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\left(\delta\vec{r}\cdot\frac{d\left(\rho\vec{v}\right)}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\delta\vec{r}\cdot\rho\vec{v}\right)-\left(\rho\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\delta\vec{r}\right).$$

Вводя вектор $\delta\vec{v}=\frac{d}{dt}\delta\vec{r}$, определяемый как $\delta\vec{v}=\vec{v}\left(\vec{r}+\delta\vec{r},t\right)-\vec{v}\left(\vec{r},t\right)$, получим

$$\left(\delta\vec{r}\cdot\frac{d\left(\rho\vec{v}\right)}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\delta\vec{r}\cdot\rho\vec{v}\right)-\left(\rho\vec{v}\cdot\delta\vec{v}\right)=\frac{d}{dt}\left(\delta\vec{r}\cdot\rho\vec{v}\right)-\delta\frac{\rho v^2}{2}.$$

В итоге уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\vec{r}\cdot\rho\vec{v}\right)-\delta\frac{\rho v^2}{2}=-\left(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}p\right)+\left(\rho\vec{g}\cdot\delta\vec{r}\right).$$

Избавимся от производной по времени, проинтегрировав уравнение по *t* с дополнительными условиями $\delta\vec{r}\left(t_1\right)=\delta\vec{r}\left(t_2\right)=0$, и получим уравнение движения элементарного объема в точке $\vec{r}$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\rho\vec{v}\cdot\delta\vec{v}\right)-\left(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}p\right)+\left(\rho\vec{g}\cdot\delta\vec{r}\right)\right\}dt=0$$

Чтобы уравнение выполнялось тождественно для любого интервала времени, подынтегральное выражение должно обращаться в нуль. Учитывая определение $\delta\vec{v}=\frac{d}{dt}\delta\vec{r}$ и выполняя интегрирование по частям для первого слагаемого, получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(-\frac{d(\rho\vec{\upsilon})}{dt}-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}\right)\cdot\delta\vec{r}\right\}dt=0 .$$

С другой стороны, это соотношение можно рассматривать, как задачу по определению экстремума функционала

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\rho\upsilon^2}{2}-p-U\right)dt=0 ,$$

рассматривая $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$ как независимые переменные, вариации которых удовлетворяют соотношению

$$\delta\vec{\upsilon}=\frac{d}{dt}\delta\vec{r} .$$

Если все $\delta\vec{r}$ независимы, то мы сразу же получаем отсюда уравнения движения. Записав систему уравнений в каждой точке пространства, и умножив ее на соответствующее $\delta\vec{r}\left(\vec{r}\right)$, независимое в любой точке, мы могли бы ограничиться вариационным принципом в виде

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_V dV\left(\rho\frac{\upsilon^2}{2}-p-U\right)dt=0 ,$$

просуммировав все уравнения (проинтегрировав по рассматриваемому объему сплошной среды).

Если же среда является несжимаемой, то давление определяется характером движения, а не параметрами задачи, то есть силы давления являются силами реакции. При этом вариации $\delta\vec{r}$ для любого элементарного объема не являются независимыми, а удовлетворяют дополнительному условию постоянства выделенного объема $div\left(\delta\vec{r}\right)=0$. Такая связь является неголономной, что приводит к задаче на условный экстремум функционала.

Суммирование по всем элементарным массам (интегрирование по объему), обращает вируальную работу в нуль (в силу идеальности связей), если поверхностные силы равны нулю.

При помощи метода неопределенных множителей Лагранжа можно искать условный экстремум так же, как и безусловный. Прибавив к выражению тождественный ноль в виде $\lambda div\left(\delta\vec{r}\right)=0$, где λ – множитель Лагранжа, вычислим вариацию функционала

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_V dV\left(\rho\frac{\upsilon^2}{2}-U\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_V dV\lambda div\left(\delta\vec{r}\right)dt=0 .$$

Преобразуя подынтегральное выражение в последнем слагаемом

$$\lambda div\left(\delta\vec{r}\right)=div\left(\lambda\delta\vec{r}\right)-\left(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\lambda\right),$$

воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса и преобразуем выражение:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_V dV\left(\rho\frac{\upsilon^2}{2}-U\right)dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_V dV\left(\delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\lambda\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\oint_{\Sigma}\left(\lambda\delta\vec{r}\cdot d\vec{S}\right)dt=0 .$$

Для жидкости, ограниченной непроницаемыми стенками сосуда, поверхностный интеграл обращается в нуль, а вариация первого интеграла, после интегрирования по частям, дает

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\int_V dV\left(-\frac{d(\rho\vec{\upsilon})}{dt}-\vec{\nabla}U-\vec{\nabla}\lambda,\delta\vec{r}\right)=0 ,$$

причем вариации $\delta\vec{r}$ теперь являются независимыми.

Подынтегральное выражение в объемном интеграле должно обращаться в нуль в силу независимсоти вариаций в каждой точке, что приводит к уравнению движения

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\nabla}\lambda=-\vec{\nabla}U ,$$

аналогичное уравнению Эйлера, если давление отождествить с множителем Лагранжа λ.