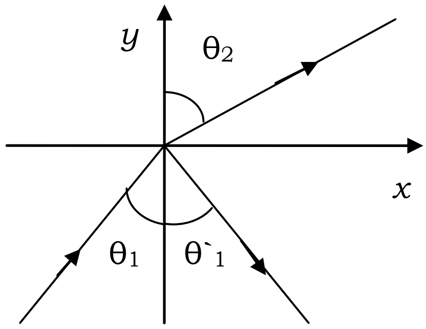
Лекция 05.12.11. Распространение волн.

1. Отражение и преломление звука.



При падении звуковой волны ω, $\vec{k}_1 = \left(k_1 \sin\vartheta_1, k_1 \cos\vartheta_1\right)$ на границу раздела двух сред, характеризуемых скоростью звука c_1 и c_2 соответственно, возникает отраженная волна ω, $\vec{k}_1' = \left(k_1' \sin\vartheta_1', -k_1' \cos\vartheta_1'\right)$ и преломленная ω, $\vec{k}_2 = \left(k_2 \sin\vartheta_2, k_2 \cos\vartheta_2\right)$.

Связь между волновым вектором и частотой волны в каждой среде определяется из волнового уравнения для потенциала скорости $\varphi = \varphi\left(t,x,y\right)$, $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

и для монохроматической волны $\varphi\left(t,x,y\right) = Ae^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$ имеет вид $\omega^2 = c^2k^2$.

Волновые векторы всех трех волн лежат в одной плоскости, $k_1' = k_1$, $\vartheta_1' = \vartheta_1$, $\dfrac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Граничные условия – равенство нормальных составляющих скоростей среды по обе стороны границы $\dfrac{\partial}{\partial y}\varphi_1\left(t,x,0\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\varphi_2\left(t,x,0\right)$ и равенство давлений $p_1\left(t,x,0\right) = p_2\left(t,x,0\right)$, вычисляемых при помощи линеаризованного интеграла Коши $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{p}{\rho} = F\left(t\right)$, приводят к уравнениям для амплитуд трех волн на границе раздела

$$\frac{\cos\vartheta_1}{c_1}\left(A_1 - A_1{}'\right) = \frac{\cos\vartheta_2}{c_2}A_2, \qquad \rho_1\left(A_1 + A_1'\right) = \rho_2 A_2.$$

Эти уравнения определяют коэффициент отражения $R = \dfrac{\left|A_1'\right|^2}{\left|A_1\right|^2} = \left(\dfrac{\rho_2 tg\vartheta_2 - \rho_1 tg\vartheta_1}{\rho_2 tg\vartheta_2 + \rho_1 tg\vartheta_1}\right)^2$.

При нормальном падении $\vartheta_1 = 0$ $R_\perp = \left(\dfrac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}\right)^2$, а при угле падения

$tg^2\vartheta_1 = \dfrac{\left(\rho_2 c_2\right)^2 - \left(\rho_1 c_1\right)^2}{\rho_1^2\left(c_1^2 - c_2^2\right)}$ $R_0 = 0$ (полное внутреннее отражение).

2. Давление волны на границу раздела

При отражении волны от границы разделадвух жидкостей, она оказывает механическое действие на эту границу. Сумма потоков энергии в отраженной и преломленной волнах равна потоку энергии падающей волны (как мгновенному, так и среднему):

$$c_1 W_1 \cos\vartheta_1 = c_1 W_1' \cos\vartheta_1 + c_2 W_2 \cos\vartheta_2.$$

Учитывая коэффициент отражения $R = \dfrac{\left|A_1'\right|^2}{\left|A_1\right|^2} = \dfrac{W_1'}{W_1}$, получим для среднего потока энергии, прошедшего во второую среду $W_2 = \dfrac{c_1\cos\vartheta_1}{c_2\cos\vartheta_2}\left(1 - R\right)W_1$.

Выражение для тензора плотности потока импульса позволяет вычислить давление на границу, как «потерянную» y-компоненту импульса при переходе через границу

$$p = \left(W_1 + W'\right)_1 \cos^2\vartheta_1 - W_2\cos^2\vartheta_2$$

С учетом выражения для W_2 получим

$$p = W_1 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 \left[(1+R) ctg\vartheta_1 - (1-R) ctg\vartheta_2 \right].$$

При нормальном падении отсюда получается

$$p = 2W_1 \frac{(\rho_1 c_1)^2 + (\rho_2 c_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 c_1^2}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2}.$$

3. *Приближение эйконала*

Плоскую на небольшом участке волну можно описывать в теорминах *лучей*, т.е. линиях, касательные к которым в каждой точке определяют направлени распространения волны, переходя к *геометрической акустике*.

В этом приближении потенциал скорости волны удобно представить в виде произведения медленно меняющейся амплитуды и экспоненты от фазы – функции координат и времени, близкой к лингейной: $\varphi = a(t,\vec r)e^{i\psi}$, где $\psi = (\vec k \cdot \vec r) - \omega t + \alpha$ (сравнить метод ВКБ). Это позволяет ввести разложение $\psi(\vec r, t) = \psi_0 + (\vec r \cdot \vec\nabla)\psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} t$ для небольших участков пространства и интервалов времени, определяя волновой вектор и частоту волны в каждой точке пространства соотношениями $\vec k = \vec\nabla\psi$, $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Фаза ψ, медленно изменяющаяся в пространстве и времени, называется *эйконалом*.

Уравнение для эйконала получается из дисперсионного соотношения для звуковой волны $\omega^2 = c^2k^2$ при подстановке в него выражений для частоты и волнового вектора через эйконал:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = c^2\left(\vec\nabla\psi\right)^2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением Гамильтона-Якоби релятивистской частицы во внешнем поле $A_k = (\Phi, -\vec A)$, энергия которой связана с обобщенным импульсом соотношением $(E - e\Phi)^2 = c^2\left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right)^2 + m^2c^4$.

Энергия как функция обобщенного импульса – это функция Гамильтона

$$H = \sqrt{c^2\left(\vec p - \frac{e}{c}\vec A\right)^2 + m^2c^4} + e\Phi,$$

а соответствующие канонические уравнения релятивистской частицы имеют вид:

$$\dot{\vec p} = -\vec\nabla H, \qquad \dot{\vec r} = \vec\nabla_p H.$$

Функция $S(\vec r, t)$, осуществляющая преобразование к новым каноническим переменным, являющимся циклическими, удовлетворяет условиям

$$\vec p = \vec\nabla S, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$

которые приводят к релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi\right)^2 = c^2\left(\vec\nabla S - \frac{e}{c}\vec A\right)^2 + m^2c^4.$$

Для ультрарелятивистской свободной частицы это уравнение упрощается

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = c^2\left(\vec\nabla S\right)^2,$$

и совпадает с уравнением для эйконала, отличаясь лишь обозначениями.

Следовательно, для волнового вектора можно записать канонические уравнения

$$\dot{\vec k} = -\vec\nabla\omega, \qquad \dot{\vec r} = \vec\nabla_k\omega.$$

в которых функцией Гамильтона является частота волны, выраженная как функция независимых переменных - координат $\vec{r}$ и обобщенных импульсов $\vec{k}$: $\omega = \omega\left(\vec{r}, \vec{k}\right)$.

В стационарных процессах функция Гамильтона $\omega = \omega\left(\vec{r}, \vec{k}\right)$ не зависит явно от времени $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$, поэтому на решениях уравнений (вдоль луча) частота волны остается постоянной.

Если звук распространяется в стационарной неоднородной среде, то скорость его распространения является функцией координат $c = c(\vec{r})$, и поэтому $\omega\left(\vec{r}, \vec{k}\right) = c(\vec{r})k$.

Канонические уравнения в этом случае имеют вид:

$$\dot{\vec{k}} = -\vec{\nabla}\omega = -k\vec{\nabla}c(\vec{r}), \qquad \dot{\vec{r}} = \vec{\nabla}_k\omega = c\frac{\vec{k}}{k} = c\vec{n}(\vec{r}).$$

Здесь $\vec{n} = \vec{k} / k$ - единичный вектор в направлении распространения волны. Учитывая, что частота волны вдоль траектории луча не меняется, с помощью соотношения $\vec{k} = \frac{\omega}{c(r)}\vec{n}(r)$ можно определить форму лучей. Воспользуемся каноническими уравнениями

$$\dot{\vec{k}} = \frac{\omega}{c}\dot{\vec{n}} - \frac{w}{c^2}\vec{n}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}c\right) = \frac{\omega}{c}\dot{\vec{n}} - \frac{w}{c}\vec{n}\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}c\right) = -k\vec{\nabla}c.$$

Отсюда

$$\dot{\vec{n}} = -\vec{\nabla}c + \vec{n}\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}c\right).$$

Перейдем теперь к траектории, вводя элементарный путь $dl = cdt$:

$$\frac{d\vec{n}}{dl} = -\frac{\vec{\nabla}c}{c} + \frac{\vec{n}}{c}\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}c\right)$$

Если в результате решения уравнения Гамильтона-Якоби эйконал известен как функция координат и времени, то с его помощью определяется и распределение интенсивности звука в пространстве. Для стационарных процессов плотность потока энергии $\vec{q}$ удовлетворяет уравнению непрерывности $div\vec{q} = 0$ вне источникаов звука. Поскольку $\vec{q} = cW\vec{n}$, то

Уравнение, определяющее распределение энергии в пространстве, имеет вид

$$div\left(cW\frac{\vec{\nabla}\psi}{\left|\vec{\nabla}\psi\right|}\right) = 0.$$

4. ***Плотность энергии в движущейся среде.***

Плотность энергии волны в движущейся среде дается выражением

$$\frac{1}{2}(\rho_0 + \rho')\left(\vec{V} + \vec{u}\right) + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0} = \frac{\rho_0 V^2}{2} + \left[\frac{\rho' V^2}{2} + \rho\left(\vec{V} \cdot \vec{u}\right)\right] + \left[\frac{\rho_0 u^2}{2} + \rho'\left(\vec{V} \cdot \vec{u}\right) + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0}\right]$$

При усреднении оставим лишь квадратичные члены, описывающие энергию волны. Из линеаризованного уравнения Эйлера найдем связь между давлением и скоростью

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho},$$

и возмущением скорости и плотности в волне

$$\left(\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}\right)\vec{u} = \vec{k}c^2\rho' / \rho_0$$

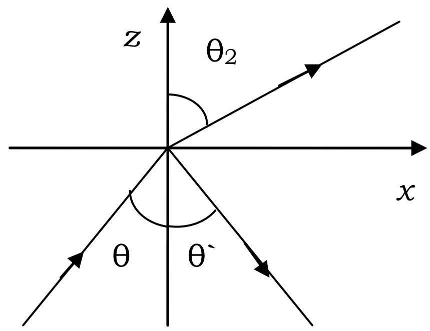
Отсюда

$$E = E_0\frac{\omega}{\omega - \left(\vec{k} \cdot \vec{V}\right)},$$

где $E_0 = c^2\rho'^2 / \rho = p'^2 / \rho c^2$ - плотность энергии в системе, движущейся со средой.

5. Отражение волны от поверхности разрыва

Пусть звуковая волна падает на границу раздела сред, причем среда $z>0$ движется со скоростью V вдоль оси *Ox*.



Волновой вектор падающей волны $\vec{k}=\frac{\omega}{c}(\sin\vartheta,\cos\vartheta)$. В покоящейся среде $z<0$ существуют падающая и отраженная волны, поэтому давление задается суммой

$$p_1=e^{-i\omega t+ik_x x}\left(e^{ik_z z}+Ae^{-ik_z z}\right).$$

Давление в преломленной волне

$$p_2=e^{-i\omega t+ik_x x+i\kappa z}$$

Дисперсионное соотношение для волны в неподвижной среде, определяемое условием существования нетривиального решения волнового уравнения $\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=0$, имеет вид: $\omega^2-c^2k^2=0$, а в движущейся среде, где волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\frac{V}{c}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=0,$$

дисперсионное соотношение

$$\left(\omega-Vk_x\right)^2=c^2\left(k_x^2+\kappa^2\right)$$

Амплитуды падающей, прошедшей и отраженной волн связаны граничными условиями – непрерывностью давления и смещения частиц по обе стороны границы:

$$1+A=B,\qquad \frac{\kappa}{\left(\omega-Vk_x\right)^2}B=\frac{k_z}{\omega^2}(1-A).$$

Отсюда амплитуда отраженной волны $A=\dfrac{\left(\omega-Vk_x\right)^2/\kappa-\omega^2/k_z}{\left(\omega-Vk_x\right)^2/\kappa+\omega^2/k_z}$,

и прошедшей $B=\dfrac{2\left(\omega-Vk_x\right)^2/\kappa}{\left(\omega-Vk_x\right)^2/\kappa+\omega^2/k_z}$.

Решая дисперсионное уравнение, определим κ, воспользовавшись условиями при $z\to\infty$.

$$\kappa=\pm\frac{\omega}{c}\sqrt{(1-M\sin\vartheta)^2-\sin^2\vartheta}.$$

Здесь число Маха $M=V/c$.

Выбор знака определяется естественым условием – групповая скорость прогедшей волны на бесконечности положительна:

$$v_z^{gr}=\frac{\partial\omega(\kappa)}{\partial\kappa}=\frac{c^2\kappa}{\omega-Vk_x}>0.$$

При этом знак фазовой скорости может оказаться как положительным, так и отрицательным

$$v_z^{ph}=\frac{\omega}{\kappa}=\pm\frac{c}{\sqrt{(1-M\sin\vartheta)^2-\sin^2\vartheta}}.$$

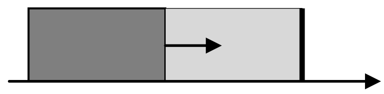
Возможны три режима отражения.

1) При малых значениях М, удовлетворяющих условию $M<1/\sin\vartheta-1$ κ – действительная величина, и $\omega-Vk_x>0$. При этом $|A|<1$ - обычное отражение.

2) В промежуточной области M, удовлетворяющих условию $1/\sin\vartheta - 1 < M < 1/\sin\vartheta + 1$ к – чисто мнимая величина. При этом $|A| = 1$ - полное внутреннее отражение.
3) При больших значениях M, удовлетворяющих условию $M > 1/\sin\vartheta + 1$ к – действительная величина, но $\omega - Vk_x < 0$, поэтому положительность групповой скорости обеспечивается изменением знака к, т.е. фазовой скорости: $v_z^{ph} = \dfrac{\omega}{\kappa} < 0$. При этом $|A| > 1$ - сверхотражение. Плотность потока энергии в преломленной волне направлена к границе раздела $q = v_z^{gr} W_2 = \dfrac{c^2\kappa}{\omega - Vk_x} \cdot \dfrac{\omega}{\omega - Vk_x} \cdot \dfrac{|B|^2}{2\rho c^2}$. В этом случае существуют такие значения волнового вектора, при которых знаменатели выражений, определяющих амплитуду отраженной и преломленной волн, обращаются в нуль, т.е. решение, отличное от нуля, может существовать при сколь угодно малой амплитуде падающей волны. Иными словами, в системе возможно спонтанное возникновение звука, созданного поверхностью разрыва.

6. Отражение прямой ударной волны

Рассмотрим отражение ударной волны от неподвижной стенки трубы, в которой распространяется ударная волна. Пусть стенка находится в точке $x = L$, а фронт ударной волны D, распространяющийся со скоростью c на рис., достигает стенки в момент $t = t_1$. Условие на стенке $u(0,t) = 0$.



За ударной волной скорость вещества u_1, его плотность ρ_1 и давление p_1 являются известными функциями начального состояния газа ρ_0, p_0.

Воспользуемся теоремами об изменении импульса и энергии газа массой m, находящегося между фронтом ударной волны в момент $t = 0$ и неподвижной стенкой. За время t_1 газ пришел в движение со скоростью u под действием сил F_0 и F_1, изменив свой импульс

$$mu = (F_1 - F_0)t_1$$

и энергию

$$\frac{m}{\mu}C_V T_1 + \frac{mu^2}{2} - \frac{m}{\mu}C_V T_0 = F_1 u t_1 .$$

Из уравнения состояния $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ с учетом геометрии трубы $V = SL$ и соотношения Майера $R = C_p - C_V = C_V(\gamma - 1)$ получим выражение для внутренней энергии

$$\frac{m}{\mu}C_V T = \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{FL}{\gamma - 1},$$

которое позволяет записать теорему об изменении энергии в удобном виде

$$\frac{F_1(L - ut_1)}{\gamma - 1} + \frac{mu^2}{2} - \frac{F_0 L}{\gamma - 1} = F_1 u t_1 .$$

Исключая отсюда скорость вещества за фронтом ударной волны $mu = (F_1 - F_0)t_1$, получим уравнение, связывающее давление за фронтом волны и время ее движения:

$$\frac{mF_1(L - ut_1)}{\gamma - 1} + \frac{(mu)^2}{2} - \frac{mF_0 L}{\gamma - 1} = F_1 mut_1, \qquad \frac{mF_1(L - ut_1)}{\gamma - 1} + \frac{(F_1 - F_0)^2 t_1^2}{2} - \frac{mF_0 L}{\gamma - 1} = F_1(F_1 - F_0)t_1^2 .$$

Отсюда можно найти время движения фронта волны $t_1^2 = \dfrac{2mL}{(\gamma + 1)F_1 + (\gamma - 1)F_0}$ и его скорость, учитывая, что $m = \rho_0 LS$, $F_0 = p_0 S$, $F_1 = p_1 S$:

$$c_1^2 = \frac{L^2}{t_1^2} = \frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_0}{2\rho_0}.$$

После достижения фронтом неподвижной стенки, движение газа прекращается, а от стенки распространяется фронт отраженной ударной волны со скоростью c_2, за которым устанавливается новое состояние газа, характеризуемое высокой температурой $T_2 > T_1 > T_0$.

За время t_2 фронт пройдет расстояние $L_2 = L - u(t_1 + t_2)$, и остановит ту массу газа, которая была приведена в движение падающей волной. Изменение импульса и энергии газа за время распространения падающей и отраженной волн по выделенной массе газа дается теоремами об изменении импульса и энергии:

$$F_1(t_1+t_2) - (F_0 t_1 + F_2 t_2) = 0$$

$$\frac{F_2\left(L - u(t_1+t_2)\right)}{\gamma-1} - \frac{F_0 L}{\gamma-1} = F_1 u(t_1+t_2)$$

Выразим из первого уравнения время движения отраженной волны $t_2 = \frac{F_1 - F_0}{F_2 - F_1} t_1$, и подставим выражение $t_1 + t_2 = \frac{F_2 - F_0}{F_2 - F_1} t_1$ во второе уравнение, учитывая $mu = (F_1 - F_0)t_1$:

$$F_2\left(mL - (F_1 - F_0)t_1^2 \frac{F_2 - F_0}{F_2 - F_1}\right) - F_0 mL = (\gamma-1)F_1(F_1 - F_0)t_1^2 \frac{F_2 - F_0}{F_2 - F_1}.$$

Так как $t_1^2 = \frac{2mL}{(\gamma+1)F_1 + (\gamma-1)F_0}$, то подстановка дает $F_2 = F_1 \frac{(3\gamma-1)F_1 - (\gamma-1)F_0}{(\gamma-1)F_1 + (\gamma+1)F_0}$.

Из выражения для давлений в падающей и отраженной ударной волнах следует, что

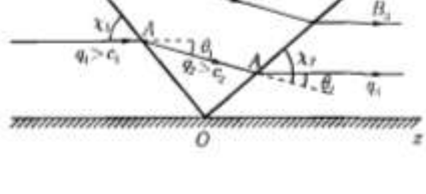
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(3\gamma-1)p_1/p_0 - (\gamma-1)}{(\gamma-1)p_1/p_0 + (\gamma+1)}.$$

При малых амплитудах возмущения в падающей волне $p_1 = p_0(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon << 1$, $p_2 = p_1(1+\varepsilon) = p_0(1+2\varepsilon)$, т.е. давление в отраженной волне удваивается. Если же амплитуда возмущения давления велика, $p_1 >> p_0$, то ситуация изменяется: $p_2 = p_1 \frac{(3\gamma-1)}{(\gamma-1)}$. В воздухе $\gamma = 7/5$ давление в отраженной волне значительно превосходит давление в падающей волне $p_2 = 8p_1$.

Замечание. Аналогичным путем можно определить коэффициент отражения ударной волны от границы раздела двух сред. При этом могут быть реализованы два сценария. Если отражение происходит от более жесткой среды, то возникает отраженная ударная волна. Если же отражение происходит от мягкой среды, то возникает отраженная волна разрежения.

7. Отражение косого скачка уплотнения

Если ударная волна падает на отражающую поверхность (жесткую стенку) наклонно, то отраженная волна также будет наклонной. Будем считать, что падающая волна – плоская, а газ вначале покоится. Скорость фронта падающей волны c_1, а угол с поверхностью χ_1, а для отраженной волны c_2 и χ_2 – соответственно. А – точка пересечения линии фрнта с поверхностью. Скорость перемещения точки вдоль поверхности $q = c_1/\sin\chi_1$. В системе координат, движущейся вместе с точкой А, фронты волн покоятся, а газ течет вдоль стенки со скоростью $q_1 > c_1$ до скачка плотности падающей волны, затем со скоростью $q_2 > c_2$ после скачка плотности, а затем, пройдя скачок параметров в отраженной волне, со скоростью q_3



параллельно стенке. Заметим, что скорость звука за фронтом падающей волны отличается от скорости звука перед ним, т.к. газ нагревается. На рис. изображена *правильная картина отражения*. Однако такая ситуация может реализоваться только при достаточно малых углах падения χ_1. При больших углах падения $\chi_1 > \chi_*$ правильное отражение невозможно. При этом возникет *маховское отражение*, характеризуемое «тройной точкой» А пересечения нескольких разрывов. Для очень сильной волны в воздухе предельный угол $\chi_* \approx 40^0$. Схематически такое отражение изображено на рис.